3.1.6. Cálculo de probabilidades em experimentos repetidos

3.1.6.1. Introdução

Há muitos problemas em Probabilidades nos quais um experimento simples é repetido várias vezes (por exemplo, uma moeda é lançada várias vezes) e o espaço amostral é composto pelos resultados possíveis destas repetições. Em problemas simples, uma boa maneira de representar o espaço amostral é pelo *diagrama de árvore*. Já fizemos isto num problema que consistia em contar o número de caras obtidas no lançamento de três moedas; os resultados possíveis deste experimento podem ser representados pelo diagrama de árvore da Fig. 1.

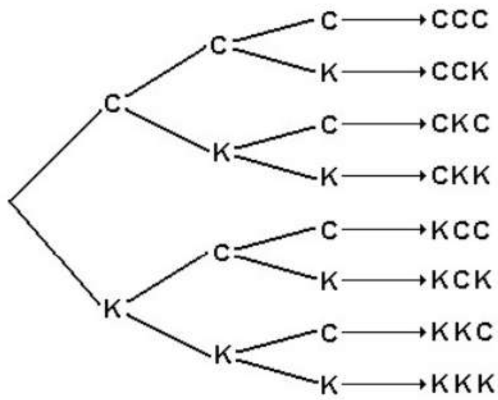

Figura 1. Diagrama de árvore para o lançamento de três moedas

Estes diagramas são usadas frequentemente em problemas *binários*, onde a cada repetição há dois resultados possíveis: *cara* ou *coroa* (lançamento de uma moeda); *menino* ou *menina* (sexo de uma criança recém-nascida), etc. Estudaremos abaixo três casos que podem ocorrer: (i) as probabilidades de cada resultado são sempre iguais, portanto os ramos da árvore são equiprováveis; (ii) as probabilidades de cada resultado são diferentes, mas constantes em todas as repetições; (iii) as probabilidades de cada resultado variam de uma repetição para outra.

3.1.6.2. Tipos de problemas com experimentos repetidos

(i) As probabilidades dos dois resultados são iguais e constantes

Se as probabilidades dos dois resultados são iguais e constantes, teremos uma árvore onde os ramos são equiprováveis, como a da Fig. 1. A única dificuldade ocorre se o número de repetições for muito grande; então, não será possível desenhar o diagrama, e teremos que calcular o número de ramos, ao invés de contá-los na árvore.

Como exemplo, suponhamos o problema:

Experimento: Dez crianças nascem em uma maternidade. Qual são as probabilidades de que:
a) todas sejam meninas
b) pelo menos uma seja menina
c) exatamente três delas sejam meninas.

Representaremos *menina* por F e *menino* por M. Se considerarmos que P(F)=P(M), o problema poderá ser resolvido por uma árvore de ramos equiprováveis, como um problema de *cara-ou-coroa*. Quantas ramos terá esta árvore? Teremos que calcular por meio de um método simples de análise combinatória, a regra da multiplicação (seção **3.1.4.1**)

Se há um nascimento, há duas possibilidades, F e M. Se há dois nascimentos, este número será dobrado, e teremos 4 resultados, ou ramos: FF, FM, MF, MM. Se há três nascimentos, o número será dobrado novamente, e teremos oito ramos (como na Fig. **1**). Se são quatro nascimentos, este número será dobrado de novo, etc. Portanto:

para 1 nascimento,	2	$= 2^1$ possibilidades
para 2 nascimentos,	2x2	$= 2^2$ possibilidades
para 3 nascimentos,	2x2x2	$= 2^3$ possibilidades
para *n* nascimentos,	2x2x...x2	$= 2^n$ possibilidades

Resolvendo agora os itens do problema acima, chamando o número de meninas de X:

Item (a)

Se são 10 os nascimentos, a árvore terá 2^{10}=1024 ramos. Destes ramos, apenas um deles conterá somente meninas, o ramo (FFFFFFFFFF); portanto,

P(*todas sejam meninas*) = $P(X=10) = 1/1024 \cong 0.0010$

Item (b)

A probabilidade de *pelo menos uma ser menina* ($X \geq 1$) pode ser calculada por

P(*pelo menos uma menina*) = $P(X \geq 1) = P(1) + P(2) + ... + P(10)$

É mais fácil porém calcularmos usando o evento complementar:

P(*pelo menos uma menina*) = 1 – P(*nenhuma menina*)

A probabilidade de não haver nenhuma menina, P(0), é igual à probabilidade de serem todas meninas, P(10).

$P(0) = P(X=10) = 1/1024 \cong 0.0010$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(0)$

$= 1 - 0{,}0010 \cong 0{,}9990$

Item (c)

A probabilidade de exatamente três crianças serem meninas é mais difícil de calcular, porque há vários ramos da árvore que atendem ao desejado. Por exemplo, o ramo

F F F M M M M M M M

tem exatamente três meninas; mas também o ramo

M M M M M M M F F F

ou o ramo

M M F M F M M F M M

e vários outros. Quantos ramos destes existem? Para calcular seu número, teremos que usar combinações (seção **3.1.4**).

Este tipo de problema é tão comum que foi criado um modelo especial para resolvê-lo, o modelo *binomial*, que será visto na seção 3.3.5.

(ii) As probabilidades dos dois resultados são diferentes, mas constantes em todas as repetições

Suponhamos que o problema seja:

Experimento: Lançamos um dado comum três vezes. Quais são as probabilidades de que:
a) a face 6 apareça três vezes?
b) a face 6 apareça exatamente duas vezes?
c) a face 6 não apareça nenhuma vez?

Podemos montar um diagrama de árvore semelhante ao da Fig. **1**, onde, em vez de termos *C* e *K* como nós dos galhos, teremos *6* e *não-6*; obtemos então o diagrama da Fig. **2** (representamos o *não-6* por *N*)

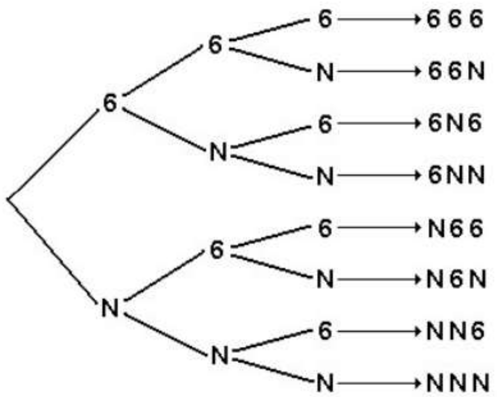

Figura 2. Árvore com ramos não-equiprováveis

A dificuldade é que, desta vez, os ramos não serão equiprováveis; teremos que calcular separadamente a probabilidade de cada um deles, e depois somar as probabilidades dos ramos que nos interessam.

Um *ramo* da árvore representa graficamente a *interseção* dos eventos ocorridos a cada *nó* da árvore. Vimos que o conceito de interseção de eventos pode ser estendido para eventos repetidos (seção **3.1.5.3**): a probabilidade de um ramo pode portanto ser calculada pelo produto das probabilidades dos nós que o compõem. Se temos três eventos A1, A2 e A3, que podem ocorrem em três tentativas independentes consecutivas, a probabilidade de os três ocorrerem será dada por:

$$P(A_1 \text{ e } A_2 \text{ e } A_3) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \text{ x } P(A_2) \text{ x } P(A_3) \qquad (1)$$

No diagrama da Fig. 2 há três ramos onde a face 6 ocorre duas vezes: os ramos 66N, 6N6 e N66. Suas probabilidades são:

$$P(66N) = P(6) \text{ x } P(6) \text{ x } P(N) = (1/6) \text{ x } (1/6) \text{ x } (5/6) = 5/216$$
$$P(6N6) = (1/6) \text{ x } (5/6) \text{ x } (1/6) = 5/216$$
$$P(N66) = (5/6) \text{ x } (1/6) \text{ x } (1/6) = 5/216$$

Os ramos de uma árvore representam eventos mutuamente excludentes (se um ramo ocorre, os outros não podem ocorrer). Portanto a probabilidade de ocorrer um dos ramos $R_1, R_2, ..., R_n$ é igual à probabilidade da união destes ramos, dada pela soma:

$$P(R_1 \text{ ou } R_2 \text{ ou } ... \text{ ou } R_n) = P(R_1 \cup R_2 \cup ... \cup R_n) = P(R_1) + P(R_2) + ... + P(R_n) \quad (2)$$

Voltando ao exemplo, e definindo X = o número de dados com a face 6.

Item (a)

Probabilidade de que a face 6 apareça três vezes: P(X=3).
Este resultado corresponde ao ramo superior da árvore da Fig. **2**., cuja probabilidade pode ser calculada pela eq, (1) :

$$P(X=3) = P(666) = P(6) \times P(6) \times P(6) = (1/6)^3 \cong 0{,}0046$$

Item (b)

Probabilidade de que a face 6 apareça exatamente duas vezes: P(X=2).
A resposta é dada pela probabilidade de que ocorra qualquer um dos três ramos que contém duas faces 6, que pode ser calculada pela eq. (2):

$$P(X=2) = P(\text{dois dados mostrarem a face 6})$$
$$P(X=2) = P(66N) + P(6N6) + P(N66) = 5/216 + 5/216 + 5/216 = 15/216 \cong 0{,}0694$$

Item (c)

Probabilidade de que a face 6 não apareça nenhuma vez: P(X=0).
É mais fácil resolvermos estes item se calcularmos primeiro a probabilidade do evento complementar P(N). A probabilidade de não ocorrer a face 6 é:

$$P(N) = 1 - P(6) = 1 - 1/6 = 5/6$$

Em vez de calcularmos:

$$P(X=0) = 1 - [P(1) + P(2) + P(3)]$$

Calculamos:

$$P(X=0) = P(NNN) = (5/6)^3 \cong 0{,}5787$$

Os resultados de todos os três itens são resumidos na Tabela **1**.

Tabela 1. Distribuição de probabilidades no lançamento de três dados (X: número de dados que mostram a face 6)

X	p(x)
0	0,5787
1	0,3472
2	0,0694
3	0,0046
Σ	1,0000

Problemas como estes das Seções (i) e (ii) são muito comuns; a variável X é uma *variável aleatória*, e o modelo para resolver estes problemas é o *binomial* (seção **3.3.5**).

(iii) As probabilidades dos dois resultados são diferentes, e variáveis a cada repetição

Os conceitos de *dependência probabilística* e de *probabilidade condicional* também se aplicam a experimentos repetidos. Se as tentativas não são independentes, a probabilidade de cada ramo será calculada pelo produto das probabilidades condicionais de cada um de seus nós. Suponhamos o problema:

> *Experimento*: Duas cartas são retiradas aleatoriamente, sem reposição, de um baralho comum. Qual a probabilidade de que sejam:
> a) uma dupla de ases
> b) nenhum ás
> c) um ás, em qualquer das duas cartas.

Usaremos a notação:

$P(A_1)$: probabilidade de obtermos um *ás* na 1ª. carta
$P(\bar{A}_1)$: probabilidade de obtermos um *não-ás* na 1ª. carta
$P(A_2|A_1)$: probabilidade condicional de obtermos um *ás* na 2ª. carta, depois que a 1ª. carta foi um *ás*
$P(A_2|\bar{A}_1)$: probabilidade condicional de obtermos um *ás* na 2ª. carta, depois que a 1ª. carta foi um *não-ás*

Resolvendo agora cada item do problema:

Item (a)

Probabilidade de uma dupla de ases

Queremos que ocorram ases nas duas cartas; queremos portanto a *interseção* de dois eventos. A probabilidade de a primeira carta ser um ás é:

$$P(A_1) = 4/52$$

Depois que um ás foi retirado do baralho, ficaram 3 ases entre as 51 cartas restantes; portanto, a probabilidade condicional de a segunda carta também ser um ás é:

$$P(A_2|A_1) = 3/51$$

A probabilidade da dupla de ases é dada pelo produto da probabilidade de A_1 pela probabilidade condicional de A_2.

$$\begin{aligned} P(\text{dois ases}) &= P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) x P(A_2|A_1) = \\ &= (4/52) \text{ x } (3/51) \\ &\cong 0{,}0045 \end{aligned}$$

Item (b)

Probabilidade de que não haja nenhum ás.

Queremos a interseção de dois eventos. A probabilidade de a primeira carta não ser um ás é:

$$P(\bar{A}_1) = 48/52$$

Depois que foi retirado um *não-ás*, ficaram no baralho 47 *não-ases* entre as 51 cartas restantes; portanto:

$$P(\bar{A}_2|\bar{A}_1) = 47/51$$

A probabilidade de não haver nenhum ás é dada pelo produto da probabilidade de $\bar{A}_1$ pela probabilidade condicional de $\bar{A}_2$:

$$\begin{aligned} P(\text{nenhum ás}) &= P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1) x\ P(\bar{A}_2|\bar{A}_1) \\ &= (48/52) \text{ x } (47/51) \\ &\cong 0{,}8507 \end{aligned}$$

Item (c)

Probabilidade de que haja exatamente um ás

Queremos que uma (e somente uma) das cartas sejam um ás. Há dois ramos que atendem a esta especificação: $A_1 \cap \bar{A}_2$ e $\bar{A}_1 \cap A_2$. A probabilidade pedida, portanto, será dada pela soma das probabilidades destes dois ramos.

$$\begin{aligned} P(\text{um ás}) &= P(A_1 \cap \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 \cap A_2) \\ &= P(A_1) \times P(\bar{A}_2|A_1) + P(\bar{A}_1) \times P(A_2|\bar{A}_1) \\ &= (4/52) \times (48/51) + (48/52) \times (4/51) \cong 0{,}0724 + 0{,}0724 \\ &\cong 0{,}1448 \end{aligned}$$

Neste tipo de problema, pode ser útil representar as repetições por meio de um diagrama de árvore onde a probabilidade de cada nó seja mostrada, como na Fig. 3.

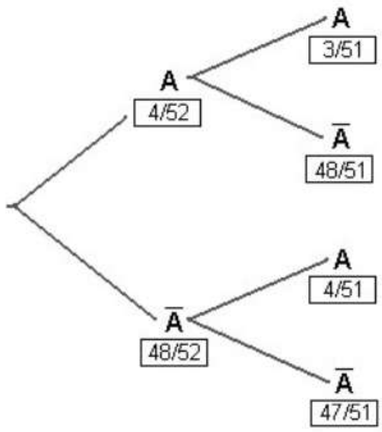

Figura 3 – Diagrama de árvores para a retirada de duas cartas

Suponhamos agora um problema um pouco mais complexo:

> *Experimento*: Três cartas são retiradas aleatoriamente sem reposição de um baralho completo. Qual é a probabilidade de que:
> a) as 3 cartas retiradas sejam ases ?
> b) haja exatamente 2 ases entre as cartas retiradas ?

O cálculo das probabilidades de cada ramo pelo produto das probabilidades condicionais a cada nó pode ser estendido para mais de dois nós. No exemplo:

Item (a)

$$\begin{aligned} P(\text{três ases}) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\, P(A_2|A_1)\, P(A_3|A_1A_2) \\ &= (4/52) \times (3/51) \times (2/50) \\ &\cong 0{,}0002 \end{aligned}$$

Item (b)

$$\begin{aligned} P(2 \text{ ases}) &= P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \\ &= (48/52)(4/51)(3/50) + (4/52)(48/51)(3/50) + (4/52)(3/51)(48/50) \\ &\cong 0{,}043 \end{aligned}$$