3.1.4. Cálculo por meio de análise combinatória

A *Análise Combinatória* fornece um conjunto de técnicas que permitem calcular o número de seqüências que podem ser feitas com os elementos de um conjunto, ou o número de sub-conjuntos, ordenados ou não, que podem ser extraídos de um conjunto maior. Estas técnicas podem ser usadas para resolver alguns dos problemas de probabilidades mais complexos, se os resultados forem considerados equiprováveis, e usarmos a definição clássica de probabilidade:

Probabilidade = n^o. de resultados favoráveis / n^o. de resultados equiprováveis

A análise combinatória permite calcular tanto o número de resultados favoráveis quanto o número de resultados possíveis, sem que seja preciso enumerá-los.

Os problemas que envolvem análise combinatória podem às vezes ser muito complicados, e por causa deles muitos alunos fogem do estudo de Probabilidade. No entanto, estes problemas complicados têm na verdade uma aplicação muita restrita, e aparecem apenas em algumas áreas específicas (por exemplo, nos resultados de jogos de azar). Para quem quer estudar Estatística, em geral não é necessário mais do que um entendimento básico de análise combinatória. Neste capítulo, veremos alguns exemplos simples para ilustrar estes conceitos e sua aplicação no cálculo de probabilidades; se você consegue entender estes exemplos, isto já será suficiente para o estudo de quase todas as técnicas estatísticas usadas nos problemas reais em ciência e tecnologia..

3.1.4.1. Regra da multiplicação.

Suponha um experimento que consiste de duas "tentativas" - a primeira pode ter m resultados diferentes; a segunda, n resultados diferentes. O resultado final do experimento é obtido associando os resultados das duas tentativas. O número de resultados finais possíveis deste experimento é então dado por

$$m \times n$$

Exemplo 1:
Uma bicicleta tem três engrenagens na coroa (engrenagens ligadas ao pedal) e nove no pinhão (na traseira, ligadas à roda). Qualquer das engrenagens da coroa pode ser conectada pela corrente com qualquer das engrenagens do pinhão, o que resulta em uma marcha diferente. Quantas marchas diferentes podem ser realizadas nesta bicicleta? *Resposta*: Fazendo m=3, e n=9, há 3×9=27 marchas diferentes possíveis.

Esta regra pode ser generalizada para experimentos compostos de mais de duas tentativas:

> Se um experimento consiste de n tentativas, e cada i-ésima tentativa pode dar r_i resultados diferentes, o número de resultados finais possíveis deste experimento pode ser calculado por:
> $$r_1 \times r_2 \times r_3 \times \ldots \times r_n$$

A lógica deste resultado pode ser entendida se representarmos o experimento por uma seqüência de caixas ou espaços vazios:

$$\square \times \square \times \square \times \ \cdots \ \times \square \times \square \times \square$$

A primeira caixa pode ser preenchida com qualquer um de r_1 resultados diferentes; a segunda caixa, com qualquer um de r_2 resultados. Isto gera $r_1 \times r_2$ pares de resultados diferentes possíveis. Se cada um destes pares é seguido por cada um dos r_3 resultados na terceira caixa, teremos $r_1 \times r_2 \times r_3$ resultados possíveis, e assim por diante.

Exemplo 2:
Se uma moeda é lançada dez vezes, quantos serão os resultados finais possíveis deste experimento? (ou, o que dá no mesmo, quantos ramos terá o diagrama de árvore que representa os resultados deste experimento?)
Resposta: resultados possíveis = $2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^{10} = 1024$

Exemplo 3:
Se um dado comum for lançado 5 vezes, quantos serão os resultados finais possíveis deste experimento?
Resposta: resultados possíveis = $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^5 = 7776$

Exemplo 4:
Uma pessoa tem dois pares de sapato, quatro calças e seis camisas. De quantas maneiras diferentes esta pessoa pode se vestir, combinando estas roupas?
Resposta: n^o. maneiras possíveis = $2 \times 4 \times 6 = 48$

Exemplo 5:
Para criar uma senha de banco, é preciso escolher ter três letras, seguidas de quatro dígitos (letras e dígitos podem ser repetidos). Quantas senhas diferentes podem ser criadas?
Resposta: n^o. senhas possíveis = $26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$ = 175.760.000

3.1.4.2. Permutações

Se um conjunto tem n elementos, cada maneira de ordenar estes elementos numa seqüência é chamada de uma ***permutação*** destes elementos. O número de permutações possíveis de n elementos será representado por P_n.

Exemplo 6: Se temos um conjunto de três letras A, B e C, quantas permutações podemos fazer com elas?

Podemos fazer com estas letras as seguintes permutações:

ABC ACB BAC BCA CAB CBA

Estes resultados podem ser organizados num diagrama de árvore, como o da Fig. 1:

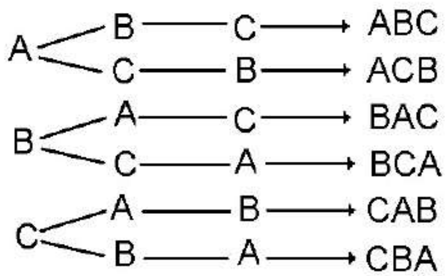

Figura 1. Diagrama de árvore enumerando as permutação de três letras

Para calcular o número total de permutações sem ter que enumerar todos os resultados possíveis (ABC, ACB, etc.) ou organizá-los num diagrama de árvore, podemos novamente representar o experimento por uma seqüência de três caixas ou espaços vazios:

$$\boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{}$$

Para preencher o primeiro espaço, temos três opções (as três letras disponíveis); para preencher o segundo, duas opções (uma das letras já foi usada, restam duas); para o terceiro, apenas uma (a única letra que sobrou). O número total de permutações é portanto
3 x 2 x 1

> Generalizando: se temos n elementos em um conjunto, o número total de **permutações** que podem ser feitas com estes elementos pode ser calculado por:
> $P_n = n \times (n\text{-}1) \times (n\text{-}2) \times \ldots \times 1 = n!$

Este produto de termos decrescentes de n a 1 é chamado em Matemática de *fatorial* de n, e representado por um sinal de exclamação (!). (*Nota*: o fatorial de 0 é por convenção igual à unidade: 0! = 1).

Exemplo 7: Uma estudante tem dez livros. Em quantas seqüências diferentes ela pode organizar estes livros numa prateleira?
Resposta: número de seqüências = $10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3.628.800$

3.1.4.3. Arranjos

Se de um conjunto de n elementos retiramos subconjuntos ordenados de r destes elementos, cada subconjunto é chamado de um ***arranjo*** dos n elementos, r a r. O número total de arranjos é representado por A_n^r.

Por exemplo, se do alfabeto completo (26 letras) tomamos três letras (sem repetição) para fazer uma senha, o número de senhas possíveis pode ser calculado usando o mesmo raciocínio usado acima, considerando que os dígitos das senhas são representados por um diagrama de árvore, ou por uma seqüência de caixas vazias:

$$\boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{}$$

Para a primeira caixa, há 26 opões possíveis (todas as letras do alfabeto); para a segunda caixa, 25 opões (uma das 26 letras já foi usada), e para a terceira caixa, as 24 opões restantes. O número de conjuntos ordenados de três letras que pode ser gerado é então:

$$26 \times 25 \times 24 = 15600$$

Generalizando: se um conjunto com n elementos retiramos um subconjunto ordenado de r elementos, podemos formar um total de **arranjos** dado por:

$$A_n^r = n \times (n\text{-}1) \times (n\text{-}2) \times \ldots \times (n\text{-}r\text{+}1)$$

Podemos representar esta expressão usando fatoriais, da forma:

$$A_n^r = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1)$$

$$A_n^r = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1) \times \frac{(n-r) \times (n-r-1) \times \ldots \times 1}{(n-r) \times (n-r-1) \times \ldots \times 1}$$

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Exemplo 8: No turfe (corrida de cavalos), uma das formas de apostar é jogar na *trifeta*, isto é, apostar em quais cavalos irão chegar em 1º, 2º e 3º lugar num certo páreo. Se num páreo vão correr 8 cavalos, quantas trifetas diferentes podem existir?
Resposta: Fazendo $n = 8$, $r = 3$, a resposta é:

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times \ldots \times 1}{5 \times 4 \times \ldots \times 1} = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

3.1.4.4. Combinações

Os três métodos vistos até agora servem, em essência, para calcular o número de ramos existentes no diagrama de árvore que representa um problema. Em cada ramo, os elementos são *ordenados*, e a ordenação é exigida pelo problema. Há porém problemas de vários tipos nos quais a ordenação dos elementos é irrelevante. Exemplos clássicos são os relacionados a retiradas de cartas de um baralho, como este:

Exemplo 9: Cinco cartas são retiradas aleatoriamente de um baralho completo. Qual é a probabilidade de serem quatro ases, e uma outra carta qualquer.?

Neste problema, a ordem com que as cartas são retiradas não importa; o jogador que recebe as cartas pode reorganizá-las na sua mão como quiser (embora os bons jogadores nunca façam isto!).

Para resolver problemas deste tipo, precisamos calcular o número de “combinações”, isto é, de subconjuntos *não-ordenados* retirados de um conjunto maior. Mais formalmente: Se de um conjunto de n elementos retiramos subconjuntos não-ordenados de r destes elementos, cada subconjunto é considerado uma ***combinação*** dos n elementos, r a r. O número total de combinações possíveis é representado por C_n^r.

Exemplo 10: Uma “mão” de pôquer é formada por cinco cartas não ordenadas, retiradas aleatoriamente de um baralho. Supondo que seja usado um baralho completo de 52 cartas, quantas mãos diferentes podem existir?

Se de um baralho completo retiramos cinco cartas, elas poderão formar

$$A_{52}^{5} = \frac{52!}{(52-5)!} = 311.875.200 \text{ arranjos diferentes.}$$

Para um jogador de pôquer, porém, a *ordem* das cinco cartas não importa. Não faz diferença para ele receber as cartas na seqüência A,K,Q,J,10 ou na seqüência 10,J,Q,K,A, pois o valor delas será o mesmo. O número de seqüências diferentes que podem ser formadas por estas cinco cartas é o número de *permutações* destas cartas, dado por:

$$P_5 = 5! = 311.875.200 = 120$$

Para o jogador, todas estas 120 permutações das cartas correspondem a apenas *uma* mão. O número de mãos possíveis é então o número total de arranjos possíveis (=311.875.200) dividido pelo número de permutações (=120):

número de mãos possíveis = 311.875.200 / 120 = 2.598.960

Generalizando: O número total de **combinações** (sub-conjuntos não ordenados) de n elementos, tomados r a r, é dado pelo número de arranjos possíveis dos n elementos r a r, dividido pelo número de permutações de r:

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{P_n} = \frac{n!}{(n-r)!} \times \frac{1}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

No exemplo acima,

$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{52!}{(52-5)!5!} = 2.598.960$$

Usaremos este valor calculado de C_n^r para resolver o problema de pôquer abaixo:

Exemplo 11: Cinco cartas são retiradas aleatoriamente de um baralho completo.
(a) Qual é probabilidade de que estas cartas sejam ás, rei, dama, valete e 10 de ouros? (Esta combinação é chamada de *royal flush* de ouros, a mão mais valiosa possível no jogo de pôquer.).
(b) Qual é a probabilidade de estas cartas formem um *royal flush* de qualquer naipe?

O número de mãos possíveis no pôquer é de 2.598.960, como calculado acima. No item (a), o número de mãos favoráveis é apenas 1; existe apenas um *royal flush* de ouros no baralho. A probabilidade é portanto igual a :

P(*royal flush* de ouros) = 1 / 2.598.960

No item (b), como há quatro naipes, existem quatros *straight flushes* possíveis (um de cada naipe). A probabilidade é portanto igual a:

P(*royal flush* de qualquer naipe) = 4 / 2.598.960 = 1 / 649.740

Nestes dois exemplos, o cálculo do número de resultados favoráveis é fácil, e não exigiu o uso de análise combinatória. Um problema um pouco mais complicado é mostrado a seguir:

Exemplo 12: Cinco cartas são retiradas aleatoriamente de um baralho completo. Qual é probabilidade de que estas cartas sejam todas do naipe de ouros?

O número de mãos favoráveis tem que ser calculado por meio de análise combinatória: com as 13 cartas existentes no naipe de ouros, quantas mãos diferentes de cinco cartas podem ser criadas? Ou seja, quantas combinações podem ser feitas das 13 cartas, 5 a 5?

$$C_{13}^{5} = \frac{13!}{(13-5)!5!} = 1287$$

A probabilidade desejada é portanto igual a:

P(todas as cartas são de ouros) = 1287 / 2.598.960 ≈ 1 / 2019

No jogo de pôquer, quanto menor a probabilidade de uma mão ser obtida, mais ela vale. A mão mais valiosa de todas é o *royal flush* de ouros; a de menor valor é a que contém apenas uma dupla (duas cartas com o mesmo número ou figura). Veremos como calcular as probabilidades destas mãos num exercício (seção 3.1.8).

Há duas observações importantes que devem ser feitas neste ponto. Primeiro: as notações de *arranjos* e de *combinações* não são padronizadas. As seguintes notações da combinação de n elementos r a r podem ser encontradas nos livros:

$$C_n^r = C_r^n = {}_nC_r = C_{n,r} = \binom{n}{r}$$

As mesmas formas de notação ocorrem com os arranjos. Isto em geral não causa confusão, porque o número maior sempre irá corresponder ao n e o menor ao r.

Segundo: existe uma propriedade que pode ser útil nos cálculos:

$$C_n^r = C_n^{n-r}$$

Porque

$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$C_n^{n-r} = \frac{n!}{(n-n+r)!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Por exemplo, se fazemos n=10 e r=2, vemos que o número de combinações de 10 cartas 2 a 2 é igual ao de combinações de 10 cartas 8 a 8:

$$C_{10}^{2} = C_{10}^{10-2} = C_{10}^{8}$$

Isto é fácil de entender, intuitivamente, pois cada combinação de duas cartas retiradas corresponde a uma combinação de oito cartas *não-retiradas*; os totais de combinações possíveis são portanto iguais.

Combinações serão usadas mais tarde nas fórmulas para dois modelos de variáveis aleatórias, o binomial (seção **3.3.5**) e o binomial negativo (seção **3.3.7.2**).