

Apêndice 1. Exemplos de previsão por amortecimento exponencial

- 1.1. Amortecimento exponencial simples
- 1.2. Amortecimento exponencial de Holt
- 1.3. Amortecimento exponencial de Holt-Winters

1.1. Amortecimento exponencial simples

Para ilustrar a aplicação do método de AES, faremos um exemplo aplicando a equação de previsão mostrada na Seção 5.1 (eq. 4) a uma série de precipitações pluviométricas mensais em uma cidade brasileira [1]. Reproduzimos abaixo esta equação:

$$\text{equação de previsão: } \hat{Z}_{T+1} = \alpha Z_T + (1 - \alpha) \hat{Z}_T$$

Não existe previsão para Z_1 . Começamos por fazer uma previsão *naïve* para $t=2$; a partir daí, o algoritmo faz as previsões para os instantes de $t=3$ em diante, usando $\alpha = 0,1$.

$$\begin{aligned} \text{em } t=1, & \quad \hat{Z}_2 = Z_1 = 136 \\ \text{em } t=2, & \quad \hat{Z}_3 = \alpha Z_2 + (1 - \alpha) \hat{Z}_2 \rightarrow \hat{Z}_3 = 0,1 \times 154 + (1 - 0,1) \times 136 = 137,8 \\ \text{em } t=3, & \quad \hat{Z}_4 = \alpha Z_3 + (1 - \alpha) \hat{Z}_3 \rightarrow \hat{Z}_4 = 0,1 \times 208 + (1 - 0,1) \times 137,8 = 144,8 \\ \text{em } t=4, & \quad \hat{Z}_5 = \alpha Z_4 + (1 - \alpha) \hat{Z}_4 \rightarrow \hat{Z}_5 = 0,1 \times 57 + (1 - 0,1) \times 144,8 = 136,0 \text{ etc.} \end{aligned}$$

Tabela 1. Previsão da série de precipitações por AES

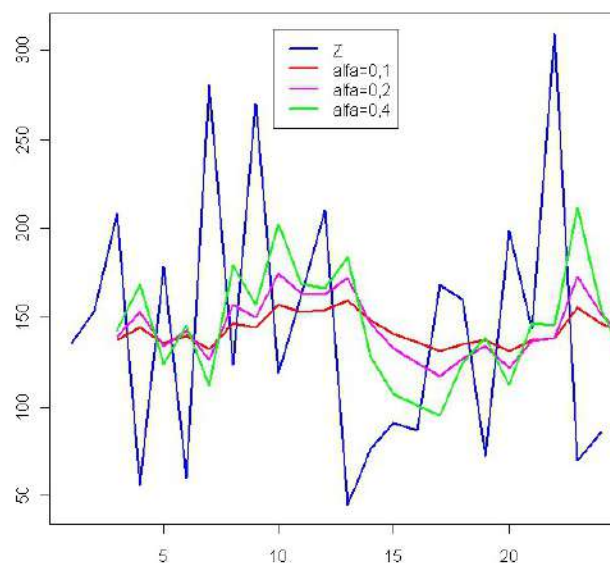
instante t	observações Z_T	AES $\hat{Z}_T$	previsões $\hat{Z}_{T+1}$	erro $e_T = Z_T - \hat{Z}_T$
1	136	–	–	–
2	154	136.0	137.8	18.0
3	208	137.8	144.8	70.2
4	57	144.8	136.0	-87.8
5	178	136.0	140.2	42.0
6	61	140.2	132.3	-79.2
7	280	132.3	147.1	147.7
8	123	147.1	144.7	-24.1
9	270	144.7	157.2	125.3
10	119	157.2		-38.2

A Tab. 1 mostra as previsões feitas para os primeiros 10 valores da série. A Tab. 2 mostra os resultados de uma busca em grade feita para encontrar o valor de α que minimiza o erro quadrático médio (MSE), usando um passo de 0,05. Entre os valores testados, $\alpha=0,5$ foi o que minimizou o MSE. (Se fizermos a busca com um passo menor - por exemplo, 0,01 - verificaremos que valores menores de alfa conseguem resultados ainda melhores).

Tabela 2. Busca em grade pelo valor ótimo de α

	alfas	MSE
[1,]	0.05	6013.575
[2,]	0.10	6263.670
[3,]	0.15	6508.398
[4,]	0.20	6748.888
[5,]	0.25	6990.178
[6,]	0.30	7237.984
[7,]	0.35	7497.962
[8,]	0.40	7775.538
[9,]	0.45	8075.978
[10,]	0.50	8404.526
[11,]	0.55	8766.575
[12,]	0.60	9167.879
[13,]	0.65	9614.791
[14,]	0.70	10114.526
[15,]	0.75	10675.446
[16,]	0.80	11307.363
[17,]	0.85	12021.865
[18,]	0.90	12832.704
[19,]	0.95	13756.242

Os gráficos da Fig. 1 mostram, para comparação, as previsões feitas usando três valores diferentes da constante de amortecimento α . A rotina em R usada está no arquivo [Apend.1.1.R](#).

**Figura 1. Comparação de previsões feitas por AES, usando diferentes α**

Referência

[1] Precipitações médias mensais, em milímetros, na cidade de Bento Gonçalves (RS), nos anos de 2007-2008. Dados obtidos pela Estação Agroclimática da Embrapa Uva e Vinho, disponíveis no site <http://www.cnpuv.embrapa.br/prodserv/meteorologia/bento-mensais.html> (acesso feito em 23/08/2009)

1.2. Amortecimento exponencial de Holt

Para mostrar o funcionamento do método de Holt, faremos um exemplo aplicando-o a mesma série simulada já usada na Fig. 6.B da seção 4.1. Para facilitar as contas, multiplicamos os valores originais desta série por 10 e arredondamos os números. A série resultante foi:

```
31.4 30.4 30.4 31.2 30.8 31.7 30.3 31.3 31.4 30.4 30.9 30.6 30.2 29.4
30.9 30.5 31.0 30.6 30.7 32.4 30.7 31.3 31.7 32.1 32.5 32.4 31.5 32.5
32.8 32.3 32.7 33.7 33.9 33.9 34.3 34.7 33.7 35.2 34.6 34.7
```

As equações necessárias para a atualização dos parâmetros e a previsão são dadas na seção 5.2.2 (eqs. 8 e 9). Reproduzimos abaixo estas equações:

$$\hat{a}_T = \alpha Z_T + (1 - \alpha)(\hat{a}_{T-1} + \hat{b}_{T-1}) \quad (\text{i})$$

$$\hat{b}_T = \beta(\hat{a}_T - \hat{a}_{T-1}) + (1 - \beta)\hat{b}_{T-1} \quad (\text{ii})$$

$$\hat{Z}_{T+1|T} = \hat{a}_T + \hat{b}_T \quad (\text{iii})$$

Usaremos no exemplo valores escolhidos arbitrariamente para as constantes de amortecimento (os valores encontrados por otimização, usando a função `optim` do R, serão vistos no Apêndice 2.2):

$$\alpha = 0,2 \quad \beta = 0,1$$

Cálculo dos valores iniciais usando os métodos dados na seção 5.2.2.1:

$$\hat{a}_1 = Z_1 = 31,4$$

$$\hat{b}_1 = \frac{(Z_2 - Z_1) + (Z_4 - Z_3)}{2} = \frac{(31,4 - 30,4) - (31,2 - 30,4)}{2} = -0,1$$

Na primeira iteração, feita a partir dos valores iniciais dos parâmetros, calculamos a primeira previsão usando a equação em (iii):

$$\hat{Z}_{2|1} = \hat{a}_1 + \hat{b}_1 = 31,4 - 0,1 = 31,3$$

A partir daí, faremos a cada passo a atualização das estimativas dos parâmetros a e b , usando as equações de atualização em (i) e (ii). Os resultados são:

Segunda iteração:

$$Z_2 = 30,4$$

$$\hat{a}_2 = \alpha Z_2 + (1 - \alpha)(\hat{a}_1 + \hat{b}_1) = 0,2 \times 30,4 + (1 - 0,2) \times 31,3 = 31,12$$

$$\hat{b}_2 = \beta(\hat{a}_2 - \hat{a}_1) + (1 - \beta)\hat{b}_1 = 0,1 \times (31,12 - 31,4) + (1 - 0,1) \times (-0,1) = -0,118$$

$$\hat{Z}_{3|2} = \hat{a}_2 + \hat{b}_2 = 31,002$$

Terceira iteração:

$$Z_3 = 30,4$$

$$\hat{a}_3 = 0,2 \times 30,4 + (1 - 0,2) \times 31,002 = 30,882$$

$$\hat{b}_3 = 0,1 \times (30,882 - 31,12) + (1 - 0,1) \times (-0,118) = -0,130$$

$$\hat{Z}_{4|3} = \hat{a}_3 + \hat{b}_3 = 30,752$$

Quarta iteração:

$$Z_3 = 31,2$$

$$\hat{a}_4 = 0,2 \times 31,2 + (1 - 0,2) \times 30,752 = 30,841$$

$$\hat{b}_3 = 0,1 \times (30,841 - 30,882) + (1 - 0,1) \times (-0,130) = -0,121$$

$$\hat{Z}_{3|2} = \hat{a}_2 + \hat{b}_2 = 30,720$$

Os resultados das oito primeiras iterações estão na Tab. 3. A Fig. 2 mostra a série de dados e as previsões feitas. A rotina em R para obter os resultados acima está no arquivo [Apend.1.2.R](#).

Tabela 3. Atualização dos parâmetros e previsões feitas pelo método de Holt com $\alpha=0,2$ e $\beta=0,1$

t	Z_t	a	b	$\hat{Z}_t$
1	31,4	31,40	-0,10	-
2	30,4	31,12	-0,12	31,30
3	30,4	30,88	-0,13	31,00
4	31,2	30,84	-0,12	30,75
5	30,8	30,74	-0,12	30,72
6	31,7	30,83	-0,10	30,62
7	30,3	30,65	-0,09	30,74
8	31,3	30,69	-0,07	30,54

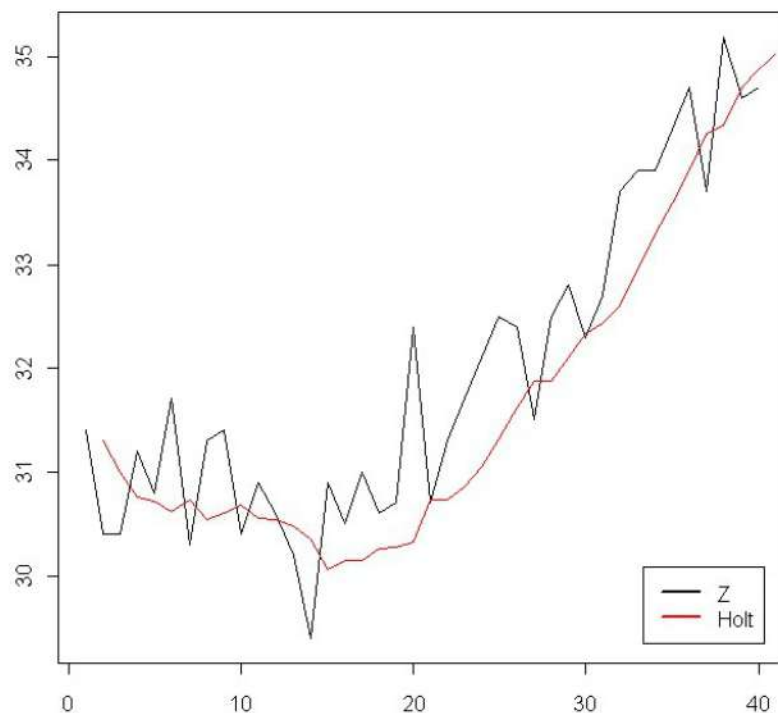


Figura 2. Valores observados $\times$ valores previstos (Amortecimento exponencial de Holt, com $\alpha=0,2$ e $\beta=0,1$)

1.3. Amortecimento exponencial de Holt-Winters

Para ilustrar passo-a-passo a aplicação do método de Holt-Winters, faremos um exemplo usando a série mostrada na Fig. 3. Como esta série tem uma evidente tendência de crescimento, e a amplitude da variação sazonal cresce à medida em que aumenta o nível, usaremos o modelo com tendência linear e sazonalidade multiplicativa definido como (veja a seção 5.4.5):

$$Z_t = (a + bt)\rho^{m(t)} + \varepsilon_t$$

Para este modelo, a previsão um-passo-à-frente ($k=1$) feita no instante T é dada por:

$$\hat{Z}_{T+1|T} = (\hat{a}_T + \hat{b}_T)\hat{\rho}_T^{m(T+1)}$$

A atualização das estimativas dos parâmetros é feita por meio de três equações recursivas, uma para cada parâmetro, usando três constantes de amortecimento diferentes (seção 5.4.5.1):

$$\hat{a}_T = \alpha \left[\frac{Z_T}{\hat{\rho}_{T-1}^{m(T)}} \right] + (1 - \alpha)(\hat{a}_{T-1} + \hat{b}_{T-1})$$

$$\hat{b}_T = \beta(\hat{a}_T - \hat{a}_{T-1}) + (1 - \beta)\hat{b}_{T-1}$$

$$\hat{\rho}_T^{m(T)*} = \gamma \left[\frac{Z_T}{\hat{a}_T} \right] + (1 - \gamma)\hat{\rho}_{T-1}^{m(T)}$$

$$\hat{\rho}_T^{m(j)} = \hat{\rho}_{T-1}^{m(j)} \quad j=1,2,\dots,S; \quad \forall j \neq T$$

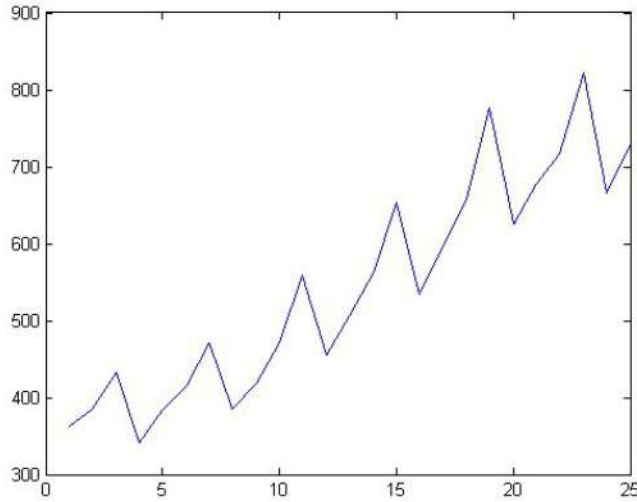


Figura 3. Número de passageiros em viagens aéreas

A série a ser prevista é trimestral, com quatro fatores sazonais; esta é a mesma série *AirPassengers* usada na Fig. 3 da seção 5.4.6, mas agora expressa em totais trimestrais, ao invés de mensais (transformamos os dados para simplificar os cálculos no exemplo).

1.3.1. Inicialização

Para estimar valores iniciais, usaremos as observações dos dois primeiros anos da série. As estimativas para a tendência, o nível, e os fatores sazonais serão calculadas usando os métodos descritos na seção 5.4.4.3.

- (i) Tendência inicial – usamos como estimador a diferença entre as médias das observações nos dois primeiros anos:

$$\begin{aligned}\hat{b}_0 &= \frac{\bar{Z}_{ano2} - \bar{Z}_{ano1}}{S} \\ \hat{b}_0 &= \frac{1}{S} \left[\frac{Z_5 + Z_6 + Z_7 + Z_8}{4} - \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4}{4} \right] \\ \hat{b}_0 &= \frac{1}{4} \left[\frac{382 + 409 + 498 + 387}{4} - \frac{362 + 385 + 432 + 341}{4} \right] \\ \hat{b}_0 &= \frac{1}{4} [419 - 380] \\ \hat{b}_0 &= 9.75\end{aligned}$$

- (ii) Nível inicial - usamos como estimador a média das observações do primeiro ano:

$$\begin{aligned}\hat{a}_0 &= \frac{1}{S} (Z_1 + \dots + Z_s) \\ \hat{a}_0 &= \frac{1}{4} (362 + 385 + 432 + 341) \\ \hat{a}_0 &= 380\end{aligned}$$

- (iii) Fatores sazonais iniciais (ρ) – usamos como estimadores as razões entre os valores observados a cada trimestre do primeiro ano e a média deste ano (seção 5.4.3.3):

$$\begin{aligned}\rho_0^{[i]} &= Z_i / \bar{Z} \\ \rho_0^{[1]} &= Z_1 / \bar{Z}_{ano1} = 362 / 380 = 0.9526 \\ \rho_0^{[2]} &= Z_2 / \bar{Z}_{ano1} = 385 / 380 = 1.0132 \\ \rho_0^{[3]} &= Z_3 / \bar{Z}_{ano1} = 432 / 380 = 1.1368 \\ \rho_0^{[4]} &= Z_4 / \bar{Z}_{ano1} = 341 / 380 = 0.8974\end{aligned}$$

1.3.2. Atualização dos parâmetros, feita no instante $t=1$

Do nível:

$$\hat{a}_T = \alpha \left[\frac{Z_T}{\hat{\rho}_{T-1}^{m(T)}} \right] + (1 - \alpha)(\hat{a}_{T-1} + \hat{b}_{T-1})$$

$$\begin{aligned}\hat{a}_1 &= \alpha \left[\frac{Z_1}{\hat{\rho}_0^{m(1)}} \right] + (1-\alpha)(\hat{a}_0 + \hat{b}_0) \\ \hat{a}_1 &= 0.3 \left[\frac{362}{0.9510} \right] + 0.7(380 + 9.75) \\ \hat{a}_1 &= 386.8\end{aligned}$$

Da declividade:

$$\begin{aligned}\hat{b}_T &= \beta(\hat{a}_T - \hat{a}_{T-1}) + (1-\beta)\hat{b}_{T-1} \\ \hat{b}_1 &= \beta(\hat{a}_1 - \hat{a}_0) + (1-\beta)\hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 &= 0.1(386.8 - 380) + 0.9 \times 9.75 \\ \hat{b}_1 &= 9.45\end{aligned}$$

Dos fatores sazonais:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_T^{m(T)*} &= \gamma \left[\frac{Z_T}{\hat{a}_T} \right] + (1-\gamma)\hat{\rho}_{T-1}^{m(T)} \\ \hat{\rho}_1^{m(1)*} &= \gamma \left[\frac{Z_1}{\hat{a}_1} \right] + (1-\gamma)\hat{\rho}_0^{m(9)} \\ \hat{\rho}_1^{m(1)*} &= 0.1 \left[\frac{362}{386.8} \right] + 0.9 \times 0.9526 \\ \hat{\rho}_1^{m(1)*} &= 0.9510\end{aligned}$$

1.3.3. Previsão

A. Previsão um-passo-à-frente

Como usamos os dados dos dois primeiros anos da série (de Z_1 a Z_8) para calcular os valores iniciais, começaremos a fazer as previsões a partir do instante $t = 9$. O algoritmo pode calcular previsões para os dois primeiros anos (estas previsões estão mostradas em cinza na Tab. 4); contudo, já que usamos estes dados na estimação dos valores iniciais, supomos que eles já sejam conhecidos, e não faz sentido tentar prever algo que já é conhecido. A previsão um-passo-à-frente a partir do instante T é dada pela equação:

$$\hat{Z}_{T+1} = (\hat{a}_T + \hat{b}_T) \hat{\rho}_T^{m(T+1)}$$

A primeira previsão será para o instante $t = 9$, feita no instante $t = 8$:

$$\begin{aligned}\hat{Z}_9 &= (\hat{a}_8 + \hat{b}_8) \hat{\rho}_8^{m(9)} \\ \hat{Z}_9 &= (431.9 + 8.19) \times 0.9507 = 418\end{aligned}$$

As previsões para os seis primeiros anos são mostradas na Tab. 4; a rotina para os cálculos é dada no arquivo **Apend.1.3.R**. A Fig. 4 compara os valores observados com os previstos. (Note que estas previsões não são as melhores possíveis, pois as constantes de amortecimento não foram otimizadas, e sim escolhidas arbitrariamente).

Tabela 4. Valores estimados para os parâmetros a cada instante e previsões um-passo-à-frente

T	trimestre	observação	nível	declividade	fatores sazonais				previsão
	m	Z_T	$\hat{a}_T$	$\hat{b}_T$	1º.trim $\hat{\rho}_T^{(1)}$	2º.trim $\hat{\rho}_T^{(2)}$	3º.trim $\hat{\rho}_T^{(3)}$	4º.trim $\hat{\rho}_T^{(4)}$	$\hat{Z}_{T+1}$
0			380	9.75	0.9526	1.0132	1.1368	0.8974	
1	1	362	386.8	9.45	0.9510	1.0132	1.1368	0.8974	371
2	2	385	391.3	8.96	0.9510	1.0102	1.1368	0.8974	401
3	3	432	394.2	8.35	0.9510	1.0102	1.1327	0.8974	455
4	4	341	395.8	7.67	0.9510	1.0102	1.1327	0.8938	361
5	1	382	402.9	7.62	0.9507	1.0102	1.1327	0.8938	384
6	2	409	408.8	7.45	0.9507	1.0092	1.1327	0.8938	415
7	3	498	423.3	8.15	0.9507	1.0092	1.1371	0.8938	472
8	4	387	431.9	8.19	0.9507	1.0092	1.1371	0.8940	386
9	1	473	457.3	9.92	0.9590	1.0092	1.1371	0.8940	418
10	2	513	479.5	11.15	0.9590	1.0153	1.1371	0.8940	471
11	3	582	497.0	11.78	0.9590	1.0153	1.1405	0.8940	558
12	4	474	515.2	12.42	0.9590	1.0153	1.1405	0.8966	454
13	1	544	539.5	13.61	0.9639	1.0153	1.1405	0.8966	506
14	2	582	559.1	14.21	0.9639	1.0178	1.1405	0.8966	561
15	3	681	580.5	14.92	0.9639	1.0178	1.1437	0.8966	653
16	4	557	603.1	15.70	0.9639	1.0178	1.1437	0.8993	533
17	1	628	628.6	16.67	0.9674	1.0178	1.1437	0.8993	596
18	2	707	660.1	18.15	0.9674	1.0231	1.1437	0.8993	656
19	3	773	677.5	18.08	0.9674	1.0231	1.1434	0.8993	775
20	4	592	684.4	16.96	0.9674	1.0231	1.1434	0.8958	625
21	1	627	685.4	15.36	0.9622	1.0231	1.1434	0.8958	678
22	2	725	703.1	15.59	0.9622	1.0239	1.1434	0.8958	716
23	3	854	727.1	16.44	0.9622	1.0239	1.1465	0.8958	821
24	4	661	741.8	16.27	0.9622	1.0239	1.1465	0.8954	666
25	1								729

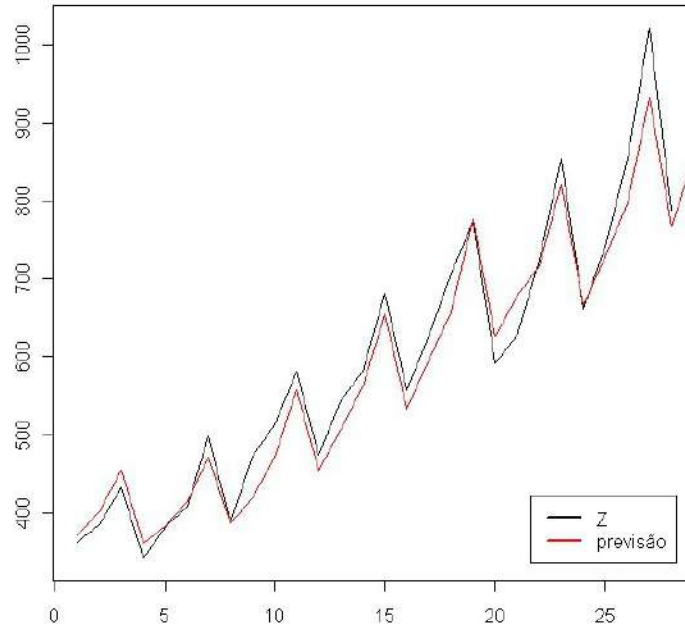


Figura 4. Valores observados × valores previstos

B. Previsões um-ano-à-frente

Suponha que estejamos ao fim do terceiro ano ($t = 12$), e queiramos fazer a previsão para todos os semestres do ano seguinte; isto é, queremos prever de Z_{13} a Z_{16} . A equação de previsão será:

$$\hat{Z}_{T+k} = (\hat{a}_{12} + k\hat{b}_{12})\hat{\rho}_{12}^{m(T+k)}$$

É preciso tomar cuidado na atribuição dos fatores sazonais correspondentes a cada trimestre do ano a ser previsto, e lembrar que:

- o instante $t=13$ corresponde ao primeiro trimestre do 3º. ano; portanto,

$$\hat{\rho}_{12}^{m(T+1)} = \hat{\rho}_{12}^{m(13)} = \hat{\rho}_{12}^{(1)}$$

- o instante $t=14$ corresponde ao segundo trimestre do 3º. ano; portanto,

$$\hat{\rho}_{12}^{m(T+2)} = \hat{\rho}_{12}^{m(14)} = \hat{\rho}_{12}^{(2)}$$

etc.

As previsões podem então ser feitas, e os resultados são:

$$\hat{Z}_{13} = \hat{Z}_{T+1} = (\hat{a}_{12} + \hat{b}_{12})\hat{\rho}_{12}^{(1)} = (515.2 + 12.42) \times 0.9590 = 506.05$$

$$\hat{Z}_{14} = \hat{Z}_{T+2} = (\hat{a}_{12} + 2\hat{b}_{12})\hat{\rho}_{12}^{(2)} = (515.2 + 2 \times 12.42) \times 1.0153 = 548.35$$

$$\hat{Z}_{15} = \hat{Z}_{T+3} = (\hat{a}_{12} + 3\hat{b}_{12})\hat{\rho}_{12}^{(3)} = (515.2 + 3 \times 12.42) \times 1.1405 = 630.15$$

$$\hat{Z}_{16} = \hat{Z}_{T+4} = (\hat{a}_{12} + 4\hat{b}_{12})\hat{\rho}_{12}^{(4)} = (515.2 + 4 \times 12.42) \times 0.8966 = 506.54$$