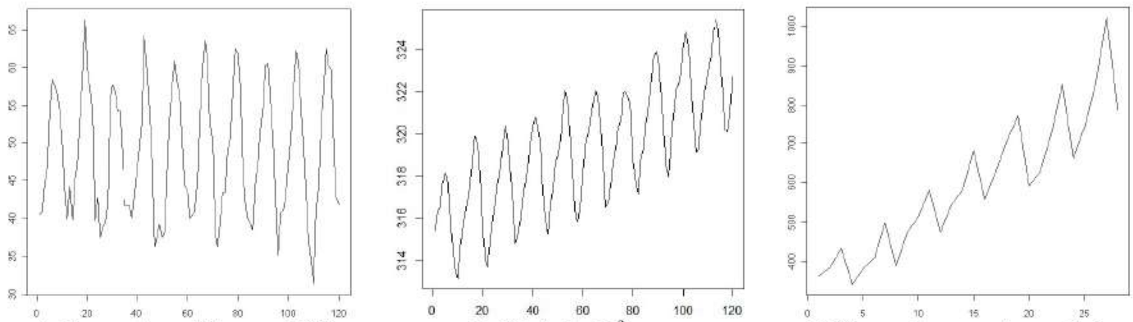
5.4. Métodos baseados em modelos sazonais

Séries sazonais são aquelas em que ocorre um tipo particular de não-estacionariedade: a média varia ao longo do tempo, de acordo com um padrão repetitivo que pode ser aproximadamente previsto. A Figura **1A** mostra, como exemplo, as temperaturas médias mensais em uma cidade inglesa: é evidente que, a cada ano, as médias variam de forma cíclica, sendo em geral a média de junho a maior do ano (verão no hemisfério Norte), e a média de janeiro a menor. As médias mensais oscilam de forma regular em torno de uma média anual de aproximadamente 50 ^{o}F. Nas séries das Figs. **1B** e **1C**, por outro lado, as médias crescem ao longo do tempo, de forma aproximadamente linear. Na série da Fig. **1B**, a amplitude do ciclo sazonal se mantém constante ao longo do tempo, independentemente do nível; na série da Fig. **1C**, contudo, a amplitude aumenta a medida que o nível sobe. Veremos a seguir modelos que podem ser aplicados a cada um destes tipos de série.



A. Temperatura média mensal (^{o}F) (Nottingham, Inglaterra)
B. Níveis de CO^2 no ar (Albert, Canadá)
C. Número de passageiros em linhas aéreas por trimestre (1949-1960)

Figura 1. Exemplos de séries sazonais

Séries sazonais são muito comuns na Economia; por exemplo, a venda de cerveja na maioria dos países varia ao longo do ano, sendo maior nos meses mais quentes e menor nos meses mais frios. É importante por isso analisar e descrever a variação sazonal de uma série, para podermos planejar estratégias para uma empresa ou um governo (com foi discutido no Cap. 3), e também para podermos calcular previsões dos valores futuros.

Originalmente, a palavra "sazonalidade" se referia à variação causada pelas estações do ano – deriva da palavra "sazão", que significa o mesmo que "estação" (compare com o inglês *season*, ou o francês *saison*). Muitos autores, no entanto, têm usado a palavra sazonalidade para descrever qualquer movimento cíclico regular, como por exemplo a variação da temperatura ao longo das 24 horas do dia, ou do consumo de energia ao longo dos dias da semana; é o que faremos neste texto.

Alguns dos métodos de amortecimento exponencial já estudados podem ser adaptados para uso em séries sazonais. Veremos abaixo como o método de Holt foi modificado em 1960 por Peter Winters [1] para a previsão de séries sazonais com nível constante ou com tendência linear; o método resultante é em geral chamado de *método de Holt-Winters*.

5.4.1. Formas de modelar a sazonalidade

A sazonalidade de uma série pode ser modelada de duas formas: (a) por uma sequência de *fatores sazonais*, que indicam quanto o valor médio da série naquela estação difere do valor médio anual; (b) por meio de *funções trigonométricas*, que representam o ciclo sazonal por meio de uma combinação linear de senos e cossenos.

5.4.1.1. Modelagem por meio de fatores sazonais.

Estes modelos incluem uma seqüência de S valores, um para cada etapa do ciclo sazonal. Para simplificar, iremos supor no texto a seguir que estamos tratando de sazonalidade com ciclo anual, que será descrita por uma série de 12 fatores, um para cada mês do ano; os modelos mostrados, contudo, podem ser usados para séries com quaisquer outro ciclo sazonal - trimestral, mensal, semanal, diário, etc.

No modelo *aditivo*, a cada mês a média anual da série será somada ao fator correspondente àquele mês. Por exemplo, suponha que a companhia de eletricidade que abastece uma cidade estime que o consumo de energia no mês de dezembro seja cerca de 5 GW acima da média anual; a previsão para o mês de dezembro, portanto, é dada pela previsão da média anual, aumentada de 5 GW. No modelo *multiplicativo*, a cada mês a média anual é multiplicada pelo fator correspondente ao mês. Por exemplo, se a mesma companhia estima que o consumo em dezembro seja 30% superior à média anual, a previsão para dezembro é dada pela previsão da média anual, multiplicada por 1,3 (isto é, aumentada em 30%).

Os fatores sazonais serão representados por $\rho^{m(t)}$. O expoente sobre a letra ρ (letra grega *rô*) indica o mês m correspondente ao instante t da série temporal. Por exemplo, suponha que tenhamos a série de medidas mensais do consumo feitas durante um período de cinco anos em uma cidade. Os meses de janeiro destes cinco anos ocorrerão nos instantes 1, 13, 25, 37 e 49 da série; os meses de fevereiro, nos instantes 2, 14, 26, 38 e 50, e assim por diante. O fator $\rho^{m(38)}$, por exemplo, será o fator sazonal do mês correspondente ao instante t = 38 da série, que é o mês de fevereiro.

Os modelos terão três componentes:

- um valor médio μ_t, que pode ser uma constante ou uma função linear de t:

$$\mu_t = a \quad \text{ou} \quad \mu_t = a + bt$$

- uma série de fatores sazonais $\rho^{m(t)}$, um correspondente a cada mês do ano:

$$\hat{\rho}^{jan}, \hat{\rho}^{fev}, \hat{\rho}^{mar}, \ldots, \hat{\rho}^{dez}$$

- um erro aleatório ε_t, modelado por uma distribuição normal.

Estes três componentes podem ser combinados em modelos *aditivos*, nos quais os três componentes são somados:

$$Z_t = \mu_t + \rho^{m(t)} + \varepsilon_t$$

ou em modelos *multiplicativos*, nos quais o fator sazonal multiplica o nível, e o erro é adicionado a este produto.

$$Z_t = \mu_t \rho^{m(t)} + \varepsilon_t$$

Portanto, se uma série tem nível constante, os modelos possíveis são:

$$Z_t = a + \rho^{m(t)} + \varepsilon_t \qquad \text{(nível constante, sazonalidade aditiva)} \qquad (1)$$

$$Z_t = a\rho^{m(t)} + \varepsilon_t \qquad \text{(nível constante, sazonalidade multiplicativa)} \qquad (2)$$

Se a série tem tendência linear, os modelos possíveis são:

$$Z_t = (a + bt) + \rho^{m(t)} + \varepsilon_t \qquad \text{(tendência linear, sazonalidade aditiva)} \qquad (3)$$

$$Z_t = (a + bt)\rho^{m(t)} + \varepsilon_t \qquad \text{(tendência linear, sazonalidade multiplicativa)} \qquad (4)$$

Nos modelos aditivos (eqs. 1 e 3), o efeito sazonal é aproximadamente constante ao longo do tempo, e independente do nível da série. Modelos assim podem ser usados para descrever séries como as das Figs. 1A e 1B. No modelo de tendência linear e sazonalidade multiplicativa (eq. 4), por outro lado, o efeito da sazonalidade depende do nível da série, e cresce à medida que o nível sobe. Modelos assim podem ser usados para séries como a da Fig. 1C.

Modelos semelhantes ao da eq. (1) já foram usados nas técnicas de *decomposição clássica* (seção 3.4.1); agora, contudo, estaremos interessados em usar modelos para *previsão* da série, e não para *análise* de seu passado.

5.4.1.2. Modelagem por meio de funções trigonométricas.

Nesta técnica, o ciclo sazonal, ao invés de ser modelado por uma seqüência de fatores discretos, é modelado por uma combinação linear de funções trigonométricas (senos e cossenos). (Lembre-se, do Cálculo, que uma função periódica contínua pode ser representada por uma série de Fourier). Estas técnicas são menos usadas na prática, e não serão vistas neste capítulo.

5.4.2. Modelo de nível constante e sazonalidade aditiva

O modelo é dado por:

$$Z_t = a + \rho^{m(t)} + \varepsilon_t$$

O nível da série é uma constante a. A previsão do valor no instante $t=T+k$, feita no instante $t=T$ (isto é, a previsão para o valor k instantes à frente) será dada por:

$$\hat{Z}_{T+k|T} = E(Z_{T+k} \mid \mathbf{Z}_T)$$

$$\hat{Z}_{T+k|T} = \hat{a}_T + \hat{\rho}_T^{m(T+k)}$$

onde $\hat{a}_T$ é a estimativa do nível a, disponível no instante T, e a $\hat{\rho}_T^{m(T+k)}$ é a estimativa do fator sazonal correspondente ao mês para o qual se faz a previsão (instante $t=T+k$), disponível no instante T.

5.4.2.1. Equações de atualização

A atualização dos parâmetros é feita por duas equações recursivas, uma para o nível e outra para o fator sazonal.

$$\hat{a}_T = \alpha(Z_T - \hat{\rho}_{T-1}^{m(T)}) + (1-\alpha)\hat{a}_{T-1} \qquad (5)$$
$$\hat{\rho}_T^{m(T)} = \gamma\left[Z_T - \hat{a}_T\right] + (1-\gamma)\hat{\rho}_{T-1}^{m(T)} \qquad (6)$$

Note que na eq. (5), o termo

$$Z_T - \hat{\rho}_{T-1}^{m(T)}$$

é uma estimativa *dessazonalizada* do nível da série a, isto é, uma estimativa obtida quando retiramos da série o efeito sazonal (ver seção 3.3). A equação de atualização calcula a média ponderada entre esta estimativa e a estimativa $\hat{a}_{T-1}$ que tinha sido obtida anteriormente. Esta equação é similar à do método de AES (seção 5.1.1(b)), reproduzida abaixo:

$$\hat{a}_T = \alpha(Z_T) + (1-\alpha)\hat{a}_{T-1} \qquad (7)$$

A diferença é que, agora, a observação mais recente Z_T tem que ser *dessazonalizada* (compare as eqs. 5 e 7). Note também que o fator sazonal usado para isto é dado pela estimativa disponível no instante anterior, $t = T\text{–}1$, igual a $\hat{\rho}_{T-1}^{m(T)}$. A nova estimativa $\hat{\rho}_T^{m(T)}$ deste fator só pode ser calculada (eq. 6) depois que for feita a atualização da estimativa do nível.

Na eq. (6), a diferença $Z_T - \hat{a}_T$ entre o valor observado Z_T e a estimativa mais recente do nível da série ($\hat{a}_T$) pode ser considerada como uma estimativa do fator sazonal daquele mês. Esta estimativa, baseada em apenas uma observação, talvez não seja tão acurada quanto a estimativa anterior ($\hat{\rho}_{T-1}^{m(T)}$), baseada em todo o passado da série; contudo, esta estimativa nova tem a vantagem, importante no contexto da séries temporais, de levar em conta a informação mais recente de que dispomos. O que a eq. (6) faz, portanto, é combinar estas duas estimativas por meio de uma média ponderada.

Note que a cada mês só é atualizado o fator sazonal que corresponde àquele mês, enquanto os demais permanecem inalterados. Portanto, no instante $t = T$,

$$\hat{\rho}_T^{m(j)} = \hat{\rho}_{T-1}^{m(j)} \qquad \text{para } \forall\, j \neq T$$

Por exemplo, se estamos no instante $t = T$, que corresponde ao mês de *setembro*, os parâmetros do modelo serão atualizados da forma:

$$\hat{a}_T = \alpha(Z_T - \hat{\rho}_{T-1}^{m(set)}) + (1-\alpha)\hat{a}_{T-1}$$
$$\hat{\rho}_T^{m(set)} = \gamma\left[Z_T - \hat{a}_T\right] + (1-\gamma)\hat{\rho}_{T-1}^{m(set)}$$

Nestas equações, $\hat{\rho}_{T-1}^{m(set)}$ é a estimativa que tínhamos no mês passado (agosto), para o fator sazonal correspondente a setembro (calculada, na verdade, em setembro do ano passado), e $\hat{\rho}_T^{m(set)}$ é a estimativa atualizada, que pode ser feita agora que temos o valor observado Z_T e a estimativa $\hat{a}_T$ do nível. A estimativa dos fatores sazonais para os outros meses não será alterada, por enquanto.

5.4.2.2. Normalização dos fatores sazonais

Alguns autores sugerem que, depois de atualizarmos o fator sazonal $\hat{\rho}_T^{m(T)}$, deveríamos *normalizar* toda a série de fatores – isto é, reajustar os fatores correspondentes aos outros meses, para que seja mantida a restrição:

$$\sum_{i=1}^{S} \rho_T^{m(i)} = 0 \qquad \text{onde S é o período sazonal}$$

Esta restrição equivale a exigir que a média dos fatores seja nula; isto é, que a adição de um fator ao nível de cada mês não afete o nível médio anual da série. A normalização pode ser feita por meio da expressão:

$$\hat{\rho}_T^{m(j)} = \hat{\rho}_T^{m(j)*} - \frac{\sum_{i=1}^{S} \hat{\rho}_T^{m(i)*}}{S}, \quad \text{para } j=1,2,\ldots,S$$

onde $\hat{\rho}_T^{m(j)}*$ representa os fatores sazonais antes da normalização. Nem todos os autores porém mencionam esta normalização, e ela provavelmente não irá fazer muita diferença, nas previsões a curto prazo.

5.4.2.3. Inicialização

Para iniciar as iterações do método, precisaremos de valores iniciais para o nível a e para os fatores sazonais ρ. Na série a ser prevista, podemos usar as observações do primeiro ano para calcular estes valores iniciais; se a série for suficientemente longa, contudo, é melhor usar para isto pelo menos os dois primeiros anos (supondo, para simplificar, que os dados sejam mensais e a sazonalidade anual).

(i) Valor inicial do nível a:

Se vamos usar dados do primeiro ano para obter os valores iniciais, podemos usar como estimativa inicial do nível a última observação deste ano:

$$\hat{a}_{12} = Z_{12}$$

Outra possibilidade é usar a média do primeiro ano (para eliminar a sazonalidade):

$$\hat{a}_{12} = \frac{1}{12}(Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_{12})$$

(ii) Valores iniciais dos fatores sazonais ρ:

Se usarmos apenas o primeiro ano da série, podemos obter estimativas dos fatores sazonais pela diferença entre cada valor observado neste ano e a média do ano:

$$\rho_0^{[1]} = Z_1 - \overline{Z} \qquad \rho_0^{[2]} = Z_2 - \overline{Z} \qquad \ldots \qquad \rho_0^{[S]} = Z_S - \overline{Z}$$

onde $\overline{Z} = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{S} Z_i$. Para dados mensais, isto significa

$$\rho_0^{jan} = Z_1 - \overline{Z} \qquad \rho_0^{fev} = Z_2 - \overline{Z} \qquad \ldots \qquad \rho_0^{dez} = Z_{12} - \overline{Z}$$

onde $\overline{Z} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} Z_i$.

Se usarmos os dois primeiros anos, podemos calcular duas estimativas de cada fator sazonal; podemos usar apenas as mais recentes (obtidas no segundo ano), ou então a média das duas. Por exemplo, para o mês de janeiro, podemos usar

$$\rho_{24}^{jan} = Z_{13} - \overline{Z}_2$$

ou

$$\rho_{24}^{jan} = \frac{1}{2}[(Z_1 - \overline{Z}_1) + (Z_{13} - \overline{Z}_2)]$$

onde $\overline{Z}_1$ e $\overline{Z}_2$ são as médias do primeiro e do segundo ano, respectivamente. Estes fatores iniciais são em geral normalizados antes do início das iterações.

5.4.3. Modelo de nível constante e sazonalidade multiplicativa

O modelo é dado por

$$Z_t = a\rho^{m(t)} + \varepsilon_t$$

A previsão do valor no instante $t=T+k$, feita no instante $t=T$ (isto é, a previsão para o valor k instantes à frente) é dada por:

$$\hat{Z}_{T+1|T} = E(Z_{T+1} \mid \mathbf{Z}_T)$$
$$\hat{Z}_{T+k|T} = \hat{a}_T \hat{\rho}_T^{m(T+k)}$$

onde $\hat{a}_T$ é a estimativa do nível a, disponível no instante T, e $\hat{\rho}_T^{m(T+k)}$ é a estimativa do fator sazonal correspondente ao mês para o qual se faz a previsão (instante $t=T+k$), disponível no instante T.

5.4.3.1. Equações de atualização

A atualização dos parâmetros é feita por duas equações recursivas, uma para o nível e outra para o fator sazonal.

$$\hat{a}_T = \alpha\left[\frac{Z_T}{\hat{\rho}_{T-1}^{m(T)}}\right] + (1-\alpha)\hat{a}_{T-1} \qquad (8)$$

$$\hat{\rho}_T^{m(T)} = \gamma\left[\frac{Z_T}{\hat{a}_T}\right] + (1-\gamma)\hat{\rho}_{T-1}^{m(T)} \qquad (9)$$

Na eq. (8), o termo $Z_T / \hat{\rho}_{T-1}^{m(T)}$ é uma estimativa *dessazonalizada* do nível da série, obtida retirando-se da série o efeito sazonal. Como no método aditivo visto acima, o que a equação de atualização faz é simplesmente uma média ponderada entre esta estimativa e a estimativa que tinha sido obtida anteriormente, $\hat{a}_{T-1}$.

Os fatores sazonais são atualizados pela eq. (9) apenas uma vez por ano, no mês correspondente ao instante $t = T$; no resto do ano, permanecem inalterados:

$$\hat{\rho}_T^{m(j)} = \hat{\rho}_{T-1}^{m(j)} \qquad \text{para } \forall\, j \neq T$$

5.4.3.2. Normalização dos fatores sazonais

Depois que atualizamos a estimativa do fator do mês correspondente ao instante *T*, teremos que fazer um pequeno reajuste em todos os outros fatores, para que seja mantida a restrição:

$$\sum_{i=1}^{S} \hat{\rho}_T^{m(i)} = S \qquad \text{onde } S \text{ é o período sazonal}$$

Esta restrição equivale a exigir que a média dos fatores seja igual à unidade, para que a multiplicação do nível a cada instante por um fator não afete o nível médio anual da série. A *normalização* é feita da seguinte forma:

$$\hat{\rho}_T^{m(j)} = \hat{\rho}_T^{m(j)} * \times \frac{S}{\sum_{i=1}^{S} \hat{\rho}_T^{m(i)} *} \qquad \text{para } j=1,2,\ldots,S$$

onde $\hat{\rho}_T^{m(j)} *$ representa os fatores sazonais antes da normalização.

1. *5.4.3.3. Inicialização*

Para iniciar as iterações do método, precisaremos de valores iniciais para o nível a e para os fatores sazonais ρ. Na série a ser prevista, podemos usar as observações do primeiro ano para calcular estes valores iniciais; se a série for suficientemente longa, contudo, é melhor usar para isto pelo menos os dois primeiros anos (supondo para simplificar que os dados sejam mensais e a sazonalidade anual).

(i) Valor inicial do nível a:

O valor inicial para o nível a pode ser obtido usando as mesmas técnicas sugeridas para o modelo de sazonalidade aditiva (seção 5.4.2.3).

(ii) Valores iniciais dos fatores sazonais ρ:

Para os fatores sazonais ρ, podemos usar como valores iniciais as razões entre cada valor observado no primeiro ano e a média do ano. Estes valores corresponderão então às estimativas disponíveis no instante t=12; a primeira previsão será feita para o instante t=13.

$$\rho_{12}^{jan} = Z_1 / \overline{Z}$$
$$\rho_{12}^{fev} = Z_2 / \overline{Z}$$
$$\ldots.$$
$$\rho_{12}^{dez} = Z_{12} / \overline{Z}$$
$$\overline{Z} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} Z_i$$

Se dispomos de dados dos dois primeiros anos para cálculo dos valores iniciais, obteremos duas estimativas de cada valor sazonal; podemos usar apenas as mais recentes (as obtidas com dados do segundo ano), ou então a média das duas. Estes valores calculados serão as estimativas disponíveis no instante $t = 24$, e a primeira previsão será feita para o instante $t = 25$. Por exemplo, para o mês de janeiro, teremos

$$\rho_{24}^{jan} = Z_{13} / \overline{Z}_2$$

ou

$$\rho_{24}^{jan} = \frac{1}{2}\left(\frac{Z_1}{\overline{Z}_1} + \frac{Z_{13}}{\overline{Z}_2}\right)$$

onde $\overline{Z}_1$ e $\overline{Z}_2$ são as médias do primeiro e do segundo ano, respectivamente. Estes fatores iniciais são em geral normalizados antes do início das iterações (Seção 5.4.3.2).

5.4.4. Modelo de tendência linear e sazonalidade aditiva

Os dois métodos vistos a seguir permitem a previsão de séries que combinam *tendência* e *sazonalidade*. A série de valores observados é considerada como resultante da combinação de três componentes: um nível local a, uma tendência b e um fator sazonal ρ.

O modelo com *sazonalidade aditiva* é dado por

$$Z_t = a + bt + \rho^{m(t)} + \varepsilon_t$$

A previsão do valor no instante $t=T+k$, feita no instante $t=T$ (isto é, a previsão para o valor k instantes à frente) será dada por:

$$\hat{Z}_{T+k|T} = \hat{a}_T + \hat{b}_T k + \hat{\rho}_T^{m(T+k)}$$

Em particular, a previsão um passo à frente (k=1) é dada por:

$$\hat{Z}_{T+1|T} = \hat{a}_T + \hat{b}_T + \hat{\rho}_T^{m(T+1)}$$

onde $\hat{a}_T$ e $\hat{b}_T$ são as estimativas do nível a e da tendência b disponíveis no instante T, e $\hat{\rho}_T^{m(T+k)}$ é a estimativa do fator sazonal correspondente ao mês para o qual se faz a previsão (instante $t=T+k$), disponível no instante T.

5.4.4.1. Equações de atualização

A atualização dos parâmetros é feita por meio de três equações recursivas, uma para cada parâmetro.

$$\hat{a}_T = \alpha\left[Z_T - \hat{\rho}_{T-1}^{m(T)}\right] + (1-\alpha)(\hat{a}_{T-1} + \hat{b}_{T-1}) \qquad \textbf{(10)}$$

$$\hat{b}_T = \beta(\hat{a}_T - \hat{a}_{T-1}) + (1-\beta)\hat{b}_{T-1} \qquad \textbf{(11)}$$

$$\hat{\rho}_T^{m(T)} = \gamma\left[Z_T - \hat{a}_T\right] + (1-\gamma)\hat{\rho}_{T-1}^{m(T)} \qquad \textbf{(12)}$$

Note que a eq. (**10**) é similar à primeira equação do método de Holt (seção 5.2.2, eq. **8**), reproduzida abaixo:

$$\hat{a}_T = \alpha Z_T + (1-\alpha)(\hat{a}_{T-1} + \hat{b}_{T-1})$$

A diferença é que, agora, o valor observado Z_t é *dessazonalizado*, pela subtração do fator sazonal correspondente. Note também que a eq. (**11**) é idêntica a segunda equação do método de Holt (seção 5.2.2, eq. **9**)

Os fatores sazonais são atualizados pela eq. (**12**) apenas uma vez por ano, no mês correspondente ao instante $t = T$; no resto do ano, permanecem inalterados:

$$\hat{\rho}_T^{m(j)} = \hat{\rho}_{T-1}^{m(j)} \qquad \text{para } j=1,2,...S;\ j \neq T$$

5.4.4.2. Normalização dos fatores sazonais

A normalização deste modelo é idêntica à do modelo de nível constante e sazonalidade aditiva (seção 5.4.2.2).

5.4.4.3. Inicialização

Para iniciar as iterações do método, precisaremos de valores iniciais para o nível a, a tendência b, e os fatores sazonais ρ. Novamente, podemos usar as observações dos dois primeiros anos para calcular estes valores iniciais, se a série for suficientemente longa (supondo para simplificar que os dados sejam mensais e a sazonalidade anual). Estes valores iniciais serão aqueles disponíveis no instante $t = 24$; o primeiro valor a ser previsto, portanto, corresponderá à primeira observação do terceiro ano, isto é, ao instante $t = 25$.

(i) Valor inicial do nível a:

Uma aproximação do nível a inicial pode ser feita usando a observação do último mês do segundo ano:

$$\hat{a}_{24} = Z_{24}$$

Outra possibilidade é usar a média de todo o segundo ano (para eliminar a sazonalidade):

$$\hat{a}_{24} = \overline{Z}_2 = \frac{1}{12}(Z_{13} + Z_{14} + ... + Z_{24})$$

Uma vez que a série tem uma tendência, este valor médio provavelmente estará acima ou abaixo do valor real do nível; isto não será um problema, se consideramos que a variação do nível ao longo do ano não é muito grande, e que o mais importante é eliminar a sazonalidade da estimativa. Se consideramos porém que a variação ao longo do ano *é* importante e não pode ser desprezada, podemos corrigir a estimativa do nível inicial para:

$$\hat{a}_{24} = \overline{Z}_2 + \frac{(12-1)}{2}\hat{b}_0$$

(ii) Valores iniciais dos fatores sazonais ρ:

Se usamos os dois primeiros anos para os valores iniciais, podemos calcular duas estimativas de cada valor sazonal e tomar a média destas estimativas. Por exemplo, para o mês de janeiro, teremos

$$\rho_{24}^{jan} = \frac{1}{2}[(Z_1 - \overline{Z}_1) + (Z_{13} - \overline{Z}_2)]$$

onde $\overline{Z}_1$ e $\overline{Z}_2$ são as médias do primeiro e do segundo ano, respectivamente. Estes fatores iniciais são em geral normalizados antes do início das iterações.

Nestas estimativas, estaremos supondo que o nível ao longo do ano seja aproximadamente constante, igual a um valor médio, e que uma aproximação razoável do fator sazonal possa ser obtida se dividirmos cada observação por este valor médio. Se consideramos porém que o nível varia muito ao longo do ano e dispomos de $J > 2$ anos de observações para as estimativas, podemos estimar os valores iniciais dos fatores sazonais da forma:

$$\hat{\rho}_t^{m(t)} = Z_t - \left[\overline{Z}_i - \left(\frac{12+1}{2} - m \right) \hat{b}_0 \right]$$

onde t indica o instante ($t=1,2,\dots,12J$), m indica o mês correspondente ao instante t ($m=1, 1, \dots, 12$), e i indica o ano a que pertence o instante t ($i=1, \dots, J$). Neste caso, ao invés de subtraírmos do valor observado a média do ano, subtraímos a estimativa do nível a cada instante obtida por extrapolação linear.

(iii) Valor inicial da tendência b:

Uma estimativa inicial da tendência pode ser dada pela diferença entre as médias do segundo ano e a do primeiro ano:

$$\hat{b}_0 = \frac{\overline{Z}_2 - \overline{Z}_1}{12}$$

Se dispomos de mais de dois anos para a inicialização, e calculamos as médias anuais

$$\overline{Z}_j, \quad j=1, \dots, J,$$

uma estimativa da tendência inicial poderá ser dada por:

$$\hat{b}_0 = \frac{\overline{Z}_J - \overline{Z}_1}{12(J-1)}$$

5.4.5. Modelo de tendência linear e sazonalidade multiplicativa

O modelo com tendência linear e sazonalidade *multiplicativa* é dado por:

$$Z_t = (a + bt)\rho^{m(t)} + \varepsilon_t$$

A previsão do valor no instante $t=T+k$, feita no instante $t=T$ (isto é, a previsão para o valor k instantes à frente) será dada por:

$$\hat{Z}_{T+k|T} = (\hat{a}_T + \hat{b}_T k)\hat{\rho}_T^{m(T+k)}$$

Em particular, a previsão um passo à frente (k=1) é dada por:

$$\hat{Z}_{T+1|T} = (\hat{a}_T + \hat{b}_T)\hat{\rho}_T^{m(T+1)}$$

onde $\hat{a}_T$ e $\hat{b}_T$ são as estimativas do nível a e da tendência b disponíveis no instante T, e $\hat{\rho}_T^{m(T+k)}$ é a estimativa do fator sazonal correspondente ao mês para o qual se faz a previsão (instante $t=T+k$), disponível no instante T.

5.4.5.1. Equações de atualização

A atualização dos parâmetros é feita por meio de três equações recursivas, uma para cada parâmetro, usando três constantes de amortecimento diferentes:

$$\hat{a}_T = \alpha\left[\frac{Z_T}{\hat{\rho}_{T-1}^{m(T)}}\right] + (1-\alpha)(\hat{a}_{T-1} + \hat{b}_{T-1}) \quad (13)$$

$$\hat{b}_T = \beta(\hat{a}_T - \hat{a}_{T-1}) + (1-\beta)\hat{b}_{T-1} \quad (14)$$

$$\hat{\rho}_T^{m(T)}* = \gamma\left[\frac{Z_T}{\hat{a}_T}\right] + (1-\gamma)\hat{\rho}_{T-1}^{m(T)} \quad (15)$$

$$\hat{\rho}_T^{m(j)} = \hat{\rho}_{T-1}^{m(j)} \quad j=1,2,\ldots S;\ \forall j \neq T$$

Note que a eq. (**13**) é similar à primeira equação do método de Holt (seção 5.2.2, eq. **8**), reproduzida abaixo:

$$\hat{a}_T = \alpha Z_T + (1-\alpha)(\hat{a}_{T-1} + \hat{b}_{T-1})$$

A diferença é que, agora, o valor observado Z_t é dessazonalizado, através da divisão pelo fator sazonal correspondente. Note também que a eq. (**14**) é idêntica a segunda equação do método de Holt (seção 5.2.2, eq. **9**).

Os fatores sazonais são atualizados pela eq. (**15**) apenas uma vez por ano, no mês correspondente ao instante $t=T$; no resto do ano, permanecem inalterados:

$$\hat{\rho}_T^{m(j)} = \hat{\rho}_{T-1}^{m(j)} \qquad \text{para } j=1,2,\ldots S;\ j \neq T$$

5.4.5.2. Normalização dos fatores sazonais

A normalização deste modelo é idêntica à do modelo de nível constante e sazonalidade multiplicativa (seção 5.4.3.2).

5.4.5.3. Inicialização

Para iniciar as iterações do método, precisaremos de valores iniciais para o nível a, a tendência b, e os fatores sazonais ρ. Podemos usar as observações dos dois primeiros anos para calcular estes valores iniciais, se a série for suficientemente longa (supondo para simplificar que os dados sejam mensais e a sazonalidade anual). Estes valores iniciais serão aqueles disponíveis no instante $t = 24$; o primeiro valor a ser previsto, portanto, corresponderá à primeira observação do terceiro ano, isto é, ao instante $t = 25$.

(i) Valor inicial do nível a:

Pode ser obtido pelas mesmas técnicas usadas no modelo de tendência linear e sazonalidade aditiva (Seção 5.4.4.3).

(ii) Valores iniciais dos fatores sazonais ρ:

Podemos usar como valores iniciais as razões entre as observações a cada mês do primeiro ano e a média deste ano (como na seção 5.4.3.3). Se usamos dois anos para estimar os valores iniciais, contudo, podemos conseguir resultados melhores se calcularmos duas estimativas de cada valor sazonal e tomarmos sua média. Por exemplo, para o mês de janeiro, teremos

$$\rho_{24}^{jan} = \frac{Z_1}{\overline{Z}_1} + \frac{Z_{13}}{\overline{Z}_2}$$

onde $\overline{Z}_1$ e $\overline{Z}_2$ são as médias do primeiro e do segundo ano, respectivamente. Estes fatores iniciais são em geral normalizados antes do início das iterações (seção 5.4.3.2).

Nestas estimativas, estamos supondo que o nível ao longo do ano seja aproximadamente constante, igual a um valor médio, e que uma aproximação razoável do fator sazonal possa ser obtida se dividirmos cada observação por este valor médio. Se consideramos contudo que o nível varia muito ao longo do ano, e dispomos de $J > 2$ anos de observações para estimar os valores iniciais, podemos estimar os fatores sazonais da forma:

$$\hat{\rho}_t^{m(t)} = \frac{Z_t}{\overline{Z}_i - \left(\frac{12+1}{2} - m\right)\hat{b}_0}$$

onde $t=1,2,...,12J$, m indica o mês correspondente ao instante t ($m=1, \ldots , 12$), e i indica o ano a que pertence o instante t ($i=1, \ldots, J$). No denominador, ao invés da média do ano há uma estimativa do nível a cada instante, obtida por uma extrapolação linear.

(iii) Valor inicial da tendência b:

Pode ser obtido pelas mesmas técnicas usadas no modelo de tendência linear e sazonalidade aditiva (Seção 5.4.4.3).

5.4.6. Exemplos

As Figs. **2** e **3** mostram dois exemplos da aplicação dos métodos estudados acima sobre duas séries de dados reais. A série na Fig. **2** é a mesma série de temperaturas médias mensais já mostrada na Fig. **1A**; as previsões são feitas usando um modelo de nível constante e sazonalidade aditiva (seção 5.4.2).

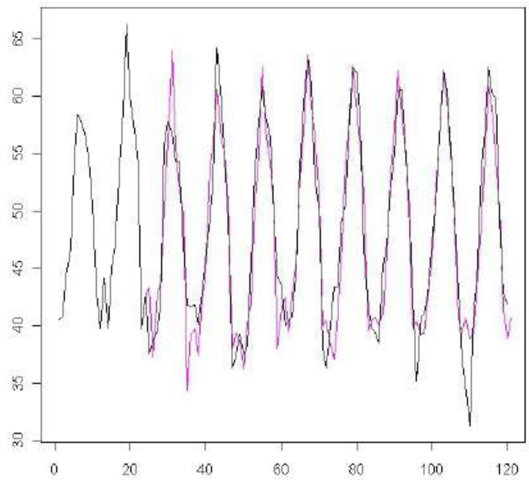


Figura 2 – Previsões pelo método de Holt-Winters, modelo de nível constante e sazonalidade aditiva. (série: *nottem*)

Na série da Fig. 3, as previsões foram feitas usando um modelo de tendência linear. Uma vez que a amplitude do efeito sazonal aumenta nitidamente à medida que sobe o nível da série, usamos um modelo com sazonalidade multiplicativa (seção 5.4.5).

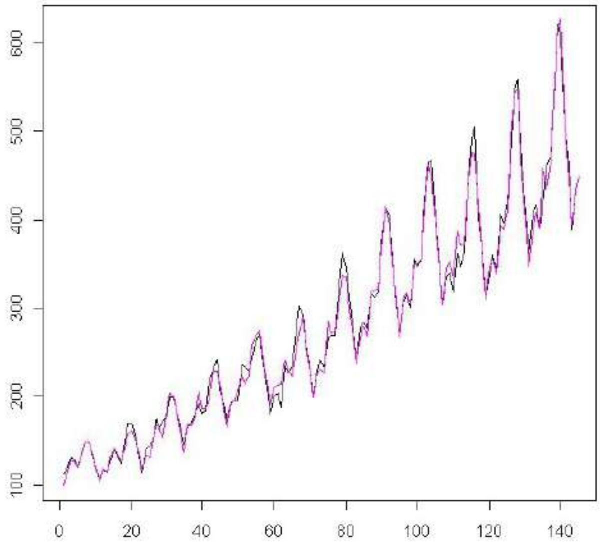


Figura 3 – Previsões pelo método de Holt-Winters, modelo de tendência linear e sazonalidade multiplicativa. (série: *AirPassengers*)

Esta série contém os dados mensais originais a partir da qual foi extraída a série já mostrada na Fig. **1C**, com dados trimestrais, que também é usada no Apêndice **1**.

5.4.7. Conclusão

O método de Holt-Winters é sem dúvida o mais importante dentre os métodos de amortecimento exponencial, e pode ser considerado como o método geral, do qual todos os outros são casos particulares. No pacote `stats` do R, por exemplo, existe apenas a função `HoltWinters` para previsão por amortecimento exponencial. No argumento desta função, se anularmos os fatores sazonais, obtemos o método não-sazonal de Holt; se anularmos a tendência, obtemos o método de amortecimento exponencial simples. (Os exemplos das Figs. **2** e **3** foram feitos usando esta função).

O método tem a vantagem de ser muito flexível, e poder ser facilmente modificado para aplicações em problemas especiais. Por exemplo, para previsão de séries de consumo de energia, geralmente caracterizadas por terem dois padrões sazonais sobrepostos (*diário*, pois o consumo é maior durante o dia do que durante a noite, e *semanal*, pois o consumo é maior nos dias de semana do que nos fins-de-semana), James W. Taylor [2] generalizou o método de Holt-Winters, criando um método de amortecimento exponencial sazonal duplo que usa dois conjuntos de fatores sazonais e duas equações para sua atualização.

Referências

[1] Winters, Peter R. (1960). Forecasting sales by exponentially weighted moving averages. *Management Science*, **6**, 324–342. DOI: 10.1287/mnsc.6.3.324.

[2] Taylor, James W. (2003). Short-Term Electricity Demand Forecasting Using Double Seasonal Exponential Smoothing. *J of Operational Research Soc*, 2003, v. 54, pp. 799-805.