5.3. Método baseado num modelo com tendência quadrática

Na Seção 4.3, vimos que para séries cujo nível varia de forma muito acentuada é possível usar modelos com tendência quadrática, nos quais os parâmetros são estimados por meio de médias móveis simples, duplas e triplas. Veremos agora que também é possível estimar estes parâmetros por meio de amortecimento exponencial, adaptando o método de Brown descrito acima (Seção 5.2.1); o resultado é o chamado *Método de amortecimento exponencial triplo de Brown*.

O modelo usado pressupõe que o nível varia de forma quadrática, descrita pela função:

$$Z_t = \mu_t + \varepsilon_t$$
$$\mu_t = a + bt + \frac{1}{2}ct^2$$

O valor esperado e a variância da série são dadas por:

$$E(Z_t) = a + bt + \frac{1}{2}ct^2$$
$$V(Z_t) = \sigma^2$$

As previsões são feitas por meio de extrapolação da tendência:

$$\hat{Z}_{T+k|T} = E(Z_{T+k} \mid \mathbf{Z}_T)$$
$$\hat{Z}_{T+k|T} = E[a + b(T+k) + \frac{1}{2}c(T+k)^2 + \varepsilon_{T+k} \mid \mathbf{Z}_T] = \hat{a}_T + \hat{b}_T(T+k) + \frac{1}{2}\hat{c}_T(T+k)^2$$
$$\hat{Z}_{T+k|T} = E[a + bk + \frac{1}{2}ck^2 + \varepsilon_{T+k} \mid \mathbf{Z}_T] = \hat{a}_T + \hat{b}_T k + \frac{1}{2}\hat{c}_T k^2$$

Para estimar os parâmetros *a*, *b* e *c*, modificamos o método de Brown duplo (Seção 5.2.1) e incluimos uma terceira equação, que faz o amortecimento exponencial da série de médias móveis triplas:

$$M_T = \alpha Z_T + (1-\alpha)M_{T-1} \qquad (1)$$
$$M_T^{[2]} = \alpha M_T + (1-\alpha)M_{T-1}^{[2]}$$
$$M_T^{[3]} = \alpha M_T^{[2]} + (1-\alpha)M_{T-1}^{[3]}$$

Note que as três equações usam a mesma constante de amortecimento α. Uma vez que os valores esperados de Z_T e de suas médias móveis podem ser escritos em termos dos parâmetros *a*, *b* e *c* do modelo, teremos então um sistema de três equações contendo como incógnitas estes três parâmetros. Usando os valores observados das médias móveis como estimativas de seus valores esperados, demonstra-se que os parâmetros podem se estimados por :

$$\hat{a}_T = 3M_T - 3M_T^{[2]} + M_T^{[3]} \qquad (2)$$

$$\hat{b}_T = \frac{\alpha}{2(1-\alpha)^2}\left[(6-5\alpha)M_T - 2(5-4\alpha)M_T^{[2]} + (4-3\alpha)M_T^{[3]}\right] \qquad (3)$$

$$\hat{c}_T = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 \left(M_T - 2M_T^{[2]} + M_T^{[3]}\right) \qquad (4)$$

5.3.1. Escolha dos valores das constantes, e métodos de inicialização

Para iniciar as iterações do método de Brown triplo, precisamos de um valor para a constante de amortecimento α, e de valores iniciais adequados para os parâmetros (a, b, c), e para as médias móveis (M, $M^{[2]}$, $M^{[3]}$).

O valor ótimo da constante de amortecimento α pode ser encontrado experimentalmente, por meio de um algoritmo de otimização não-linear (veja Seção 5.5). Para obter valores iniciais para os parâmetros e para as médias móveis podemos, quando a série disponível é razoavelmente longa, separar a amostra em duas partes, e usar os dados da primeira parte para estimar estes valores iniciais, da seguinte forma:

- Estimar valores iniciais $\hat{a}_0$, $\hat{b}_0$ e $\hat{c}_0$ para os parâmetros, por meio de mínimos quadrados ordinários (ajustando uma função quadrática aos dados);
- A partir de $\hat{a}_0$, $\hat{b}_0$ e $\hat{c}_0$, estimar valores iniciais para as médias móveis por meio das equações (**2**), (**3**) e (**4**). Resolvendo estas equações para as médias, e fazendo β=1-α, obtemos:

$$M_0 = \hat{a}_0 - \frac{\beta}{\alpha}\hat{b}_0 + \frac{\beta(2-\alpha)}{2\alpha^2}\hat{c}_0$$

$$M_0^{[2]} = \hat{a}_0 - \frac{2\beta}{\alpha}\hat{b}_0 + \frac{2\beta(3-2\alpha)}{2\alpha^2}\hat{c}_0$$

$$M_0^{[3]} = \hat{a}_0 - \frac{3\beta}{\alpha}\hat{b}_0 + \frac{3\beta(4-3\alpha)}{2\alpha^2}\hat{c}_0$$

Se a série disponível for curta, e não queremos separar dados para inicialização, valores iniciais aproximados podem ser obtidos da seguinte forma:

- médias móveis: fazendo todas iguais à primeira observação

$$M_1 = M_1^{[2]} = M_1^{[3]} = Z_1$$

- nível inicial: igual à primeira observação

$$\hat{a}_1 = Z_1$$

- tendência inicial: igual à média das diferenças entre as k primeiras observações; por exemplo, fazendo k=3:

$$\hat{b}_1 = \frac{Z_4 - Z_1}{3}$$

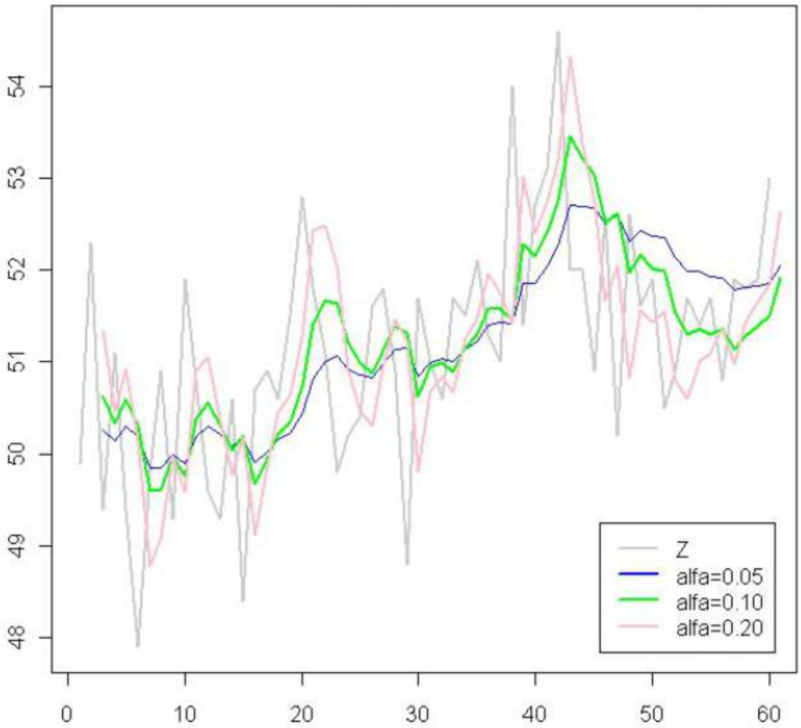
Contudo, devido à não-linearidade deste método, não é fácil avaliar qual pode ser o impacto dos valores iniciais escolhidos nas previsões futuras.

5.3.2. Exemplo

A Fig. **1** mostra a série *nhtemp* e as previsões feitas pelo método de amortecimento triplo de Brown usando um modelo quadrático e três valores diferentes para a constante α. Para estes três valores, o MSE calculado no intervalo de t=20 a t=60 foi de

α = 0,05 → MSE = 1,250
α = 0,10 → MSE = 1,291
α = 0,20 → MSE = 1,470

O valor α=0,05 foi o que minimizou o MSE numa busca feita de α=0,01 a α=0,20, no mesmo intervalo de t=20 a t=60.



5.3.4. Conclusão

O método de amortecimento exponencial triplo de Brown é o único método não-linear que veremos, e tem as vantagens e desvantagens comuns a todos os métodos não-lineares, em relação aos métodos lineares. Por um lado, o método é mais flexível e reage mais rapidamente do que os métodos lineares a mudanças súbitas na tendência da série; e pode por isso vir a ter bom desempenho na previsão de séries muito instáveis. Por outro lado, esta flexibilidade pode fazer com que o método seja muito afetado pelo ruído presente nos dados, e leve às vezes a previsões exageradas. Esta flexibilidade pode ser em parte reduzida, se usarmos valores muito baixos de α (abaixo de 0.1, como no exemplo acima). Na prática, este método tem sido usado com menos frequência do que os métodos lineares de Brown e de Holt.