4.6.1. Teste da diferença entre médias (amostras grandes)

Um dos problemas mais comuns em Estatística é o de comparar as diferenças entre as médias de duas populações a partir de duas amostras. Isto acontece, por exemplo, quando queremos comparar o efeito de dois tratamentos diferentes sobre cobaias : uma amostra de cobaias será submetida ao tratamento 1, a outra ao tratamento 2, e depois um variável de resposta será medida nas duas amostras. Iremos testar a diferença que ocorreria nas médias μ das respostas se estes tratamentos fossem aplicados na população em geral:

$$\mu_1 - \mu_2$$

O teste será um *teste de diferença entre médias*. A estatística de teste será a diferença D entre as médias nas respostas observadas nas duas amostras,

$$D = \overline{X}_1 - \overline{X}_2$$

O teste irá verificar se esta diferença D é ou não significativamente diferente de zero; isto é, se os dois tratamentos produziriam ou não respostas médias diferentes se aplicados na população.

4.6.1.1. Distribuição amostral da diferença entre médias

Para fazer o teste, precisamos de conhecer a distribuição amostral da estatística de teste D. Esta distribuição é dada pelo Teorema 1.

Teorema 1: *Distribuição amostral da diferença entre médias D*
Se duas populações têm médias μ_1 e μ_2 e delas retiramos amostras aleatórias grandes de tamanhos n_1 e n_2, a diferença D entre as médias destas amostras,

$$D = \overline{X}_1 - \overline{X}_2$$

seguirá uma distribuição que tende para a normal, com parâmetros:

$$D \to N(\mu_D, \sigma_D^2) \quad \text{quando } n \to \infty$$

$$\text{onde: } \mu_D = \mu_1 - \mu_2 \quad \text{e} \quad \sigma_D = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

A diferença D poderá ser transformada em uma variável de teste Z de distribuição normal padrão, por meio de:

$$Z = \frac{D - \mu_D}{\sigma_D} = \frac{D - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Não é difícil entender o porquê de esta distribuição ser normal: as médias $\overline{X}_1$ e $\overline{X}_2$ das amostras têm distribuições que tendem para a normal quando cresce o tamanho da amostra (seção 4.5.3), e a diferença entre duas variáveis normais também é uma variável normal (seção 3.3.4.3). Os parâmetros da distribuição de D também são fáceis de deduzir, dadas as propriedades do valor esperado e da variância da diferença entre duas variáveis aleatórias (seção 3.3.1.5):

- o valor esperado da diferença $D = \overline{X}_1 - \overline{X}_2$ é a diferença entre os valores esperados das variáveis μ_1 e μ_2:

$$E(D) = E(\overline{X}_1) - E(\overline{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$$

- a variância da diferença $D = \overline{X}_1 - \overline{X}_2$ é a soma das variâncias das variáveis $\overline{X}_1$ e $\overline{X}_2$:

$$V(\overline{X}_1) = \frac{\sigma_1^2}{n_1}$$

$$V(\overline{X}_2) = \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

$$V(D) = V(\overline{X}_1) + V(\overline{X}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

onde n_1 e n_2 são os tamanhos das duas amostras.

4.6.1.2. Teste de hipótese sobre a diferença de médias

Na maioria dos testes feitos para comparar médias, a hipótese nula é a de que as duas populações têm a mesma média, e portanto a diferença entre elas é nula:

$$\mu_1 - \mu_2 = 0$$

As três hipóteses alternativas possíveis são as de que as duas médias são iguais, ou de que uma delas é maior do que a outra:

$$\mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

$$\mu_1 - \mu_2 < 0$$

$$\mu_1 - \mu_2 > 0$$

Como a hipótese nula tem que ser modificada de acordo com o tipo de hipótese alternativa desejado, estes três tipos de hipóteses podem ser enunciados como:

teste bilateral	teste unilateral à esquerda	teste unilateral à direita
$H_0: \quad \mu_1 - \mu_2 = 0$	$H_0: \quad \mu_1 - \mu_2 \geq 0$	$H_0: \quad \mu_1 - \mu_2 \leq 0$
$H_1: \quad \mu_1 - \mu_2 \neq 0$	$H_1: \quad \mu_1 - \mu_2 < 0$	$H_1: \quad \mu_1 - \mu_2 > 0$

Como as variâncias das populações (σ_1^2 e σ_1^2) são em geral desconhecidas, teremos que estimá-las à partir das variâncias observadas nas amostras (s_1^2 e s_2^2), o que resulta em:

$$Z \cong \frac{D}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Este tipo de estimativa de um parâmetro a partir da estatística amostral correspondente é chamado de *estimativa pontual*, como veremos na seção 4.8.

4.6.1.3. Exemplo

(i) Exemplo 1: Peso ao nascer de crianças, de acordo com hábitos de fumo da mãe

A Tab. **1** mostra as médias dos pesos ao nascer de crianças, observadas em duas amostras separadas de acordo com o hábito de fumar da mãe. Faremos um teste de hipótese para verificar se os pesos médios diferem significativamente entre as crianças das mães que fumam e as das que não fumam.

Tabela 1. Pesos ao nascer de crianças, de acordo com hábitos de fumo da mãe

	amostra	
estatística	(1) Mães não-fumantes	(2) Mães fumantes
média ($\overline{X}$)	3055 g	2773 g
desvio-padrão (s)	752 g	660 g
tamanho da amostra (n)	115	74

Faremos um teste bilateral, usando as hipóteses :

$$H_0 : \quad \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1 : \quad \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

Se considerarmos um nível de significância α=0,05, os valores críticos de Z serão de -1,96 e +1,96. As estatísticas amostrais, retiradas da tabela, são:

$$\overline{X}_1 = 3055g \qquad s_1 = 752 \qquad n_1 = 115$$
$$\overline{X}_2 = 2773g \qquad s_2 = 660 \qquad n_2 = 74$$

A diferença entre as médias encontradas nas amostras foi:

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 = 3055 - 2773 = 282g$$

Para ver se esta diferença é significativa, calculamos seu valor padronizado Z:

$$z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{3055 - 2773}{\sqrt{\dfrac{752^2}{115} + \dfrac{660^2}{74}}} = 2{,}71$$

O gráfico da Fig. **1** mostra que o valor de Z observado neste teste foi alto, muito acima do valor crítico de Z_c = 1,96. Isto indica que há fortes evidências nestas amostras contra a hipótese nula, o que é confirmado pelo valor-p deste resultado:

valor-p = 2 × P(Z>2,71) = 0,007

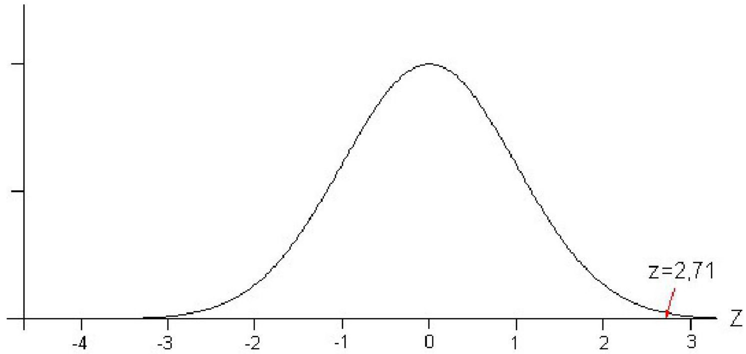

Figura 1. Diferença padronizada entre os pesos médios ao nascer

O resultado do teste, portanto, é de que o peso das crianças das mães que fumam é significativamente menor do que os das crianças das mães que não fumam.

(ii) Exemplo 2: *Peso ao nascer de crianças de acordo com seu sexo*

No exemplo anterior, o peso das crianças em cada grupo (de mães fumantes e de mães não-fumantes) foi dado sem levar em consideração o sexo da criança. Homens e mulheres adultos têm pesos e alturas médias claramente diferentes; não seria melhor separar os recém-nascidos por sexo?

Para verificar se o peso médio ao nascer da criança depende de seu sexo, faremos um teste de diferenças de médias usando as 503 crianças de uma outra amostra. As estatísticas amostrais estão dadas na Tab. 2.

Tabela 2. Pesos ao nascer de crianças, de acordo com o sexo

	pesos ao nascer	
	(1) meninos	(2) meninas
média ($\overline{X}$)	3035.3 g	3034.6 g
desvio-padrão (s)	901.2 g	651.5 g
tamanho da amostra (n)	264	239

Faremos um teste bilateral usando as hipóteses :

$$H_0: \quad \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1: \quad \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

As estatísticas amostrais, retiradas da tabela, são:

$$\overline{X}_1 = 3035{,}3g \qquad s_1 = 901{,}2 \qquad n_1 = 264$$

$$\overline{X}_2 = 3034{,}6g \qquad s_2 = 651{,}5 \qquad n_2 = 239$$

A diferença entre as médias encontradas nas amostras foi:

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 = 3035{,}3 - 3034{,}6 = 0{,}7g$$

A diferença observada entre os pesos dos meninos e das meninas foi de menos de um grama, o que não parece significativo. Para confirmar esta suposição, calculamos o valor padronizado Z:

$$z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{3035{,}3 - 3034{,}6}{\sqrt{\frac{901{,}2^2}{264} + \frac{651{,}5^2}{239}}} = 0{,}010$$

O valor de Z está portanto praticamente no centro da distribuição, e a diferença entre as médias é certamente não-significativa (valor-p = 0,99); concluímos portanto que o peso médio ao nascer de uma criança não depende de seu sexo.