3. Decomposição de séries temporais

3.1. Introdução

Os métodos de *decomposição* são métodos que permitem *analisar* ou *decompor* uma série, isto é, isolar seus diferentes componentes e escrever um modelo que os relacione entre si.

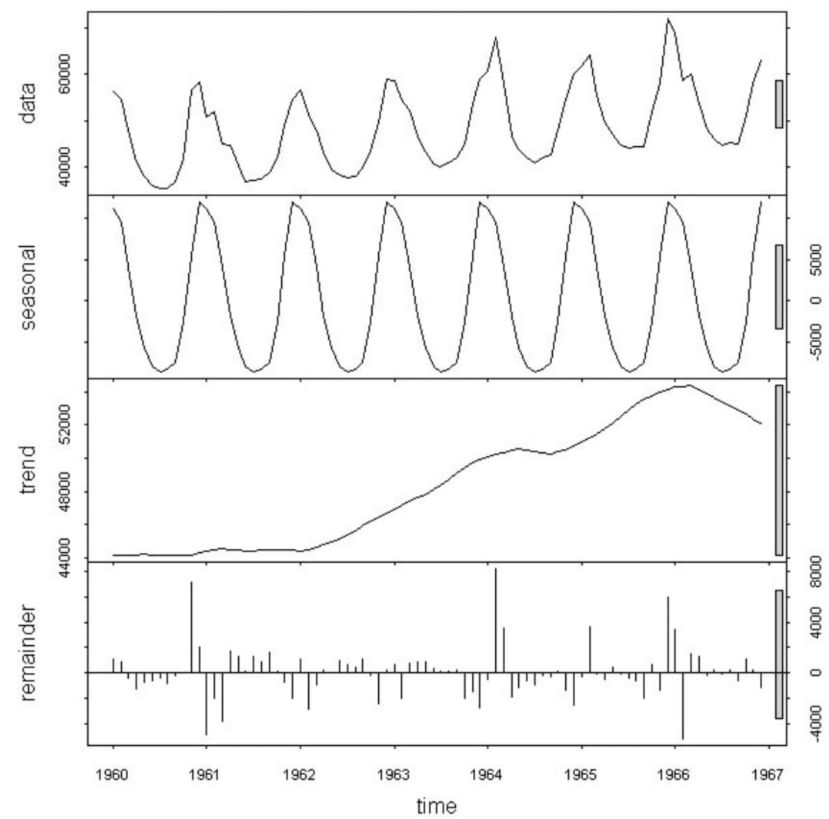


Figura 1 – Decomposição de uma série de consumo mensal de eletricidade

A idéia básica é extrair da série um "padrão", isto é, um componente razoavelmente regular e previsível, que pode por sua vez ser decomposto em *tendência T* (*trend*) e *sazonalidade S* (*seasonality*). O que sobra é o *resíduo*, ou *erro aleatório E* (*residual* ou *remainder*). Há portanto três componentes, que podem estar relacionados entre si por meio de um modelo aditivo:

$$Z_t = T_t + S_t + E_t$$

Ou por um modelo multiplicativo:

$$Z_t = T_t \times S_t \times E_t$$

Cada um destes componentes tem a sua própria série temporal, e estas são geralmente exibidas na forma de um gráfico (*decomposition plot*) como o da Fig. 1, que mostra o consumo mensal de energia elétrica em uma cidade americana, decomposto de forma aditiva. A janela superior mostra a série de dados. As janelas inferiores mostram a tendência, a sazonalidade e o resíduo; estes componentes, somados, resultam na série original.

O problema é: dada uma única série Z, como extrair os componentes *T*, *S* e *E*? Os métodos chamados de "clássicos", baseados em médias móveis ou em razões, originaram-se nos anos 1920 e foram durante muito tempo os métodos favoritos para extração dos componentes. Em anos mais recentes, com a divulgação dos computadores, vários métodos mais complexos têm sido desenvolvidos para estimar a tendência, usando por exemplo regressão local e *loess*; contudo, as idéias básicas que norteiam a decomposição de uma série continuam as mesmas.

Estes métodos visam a *análise*, para que o comportamento da série possa ser melhor compreendido; não servem para a previsão, porque não indicam como cada um destes componentes irá se comportar no futuro. Como foi visto no capítulo anterior, é relativamente fácil prever a *sazonalidade*, já que seu padrão é bastante estável. Os métodos de decomposição, contudo, não produzem um modelo para a *tendência* que possa ser extrapolado para o futuro (especialmente no médio ou longo prazo), e o *resíduo* será sempre imprevisível.

Nota sobre a terminologia : *nível* e *tendência*

Nos métodos de previsão que utilizam médias móveis (Cap. 4) e amortecimento exponencial (Cap. 5), existe uma distinção muito clara entre os conceitos de *nível* e de *tendência* de uma série. O *nível* é o valor médio da série em um dado instante, descontados os efeitos da sazonalidade e do erro aleatório. A *tendência* é a variação do nível da série entre um instante e outro. Uma analogia pode ser feita com o cálculo: o nível é o valor da função num dado instante, e a tendência é a derivada da função naquele instante. Estes métodos de previsão procuram, primeiro, estimar o nível atual da série; depois, estimar a tendência; por fim, combinando estas duas estimativas, tentar prever onde estará o nível da série nos próximos instantes.

Nos textos sobre decomposição de séries, porém, o significado destes termos não é tão bem definido. Como o interesse não é prever o futuro de uma série, e sim descrever seu passado, a palavra "tendência" (ou "tendência/ciclo") costuma ser usada para indicar a série de estimativas do nível ao longo do tempo. Um exemplo disto está no painel *trend* da Fig. 1. Quem trabalha com previsões pode considerar que este gráfico mostra a trajetória passada do *nível* da série; os textos sobre análise de séries, porém, consideram que este gráfico mostra a *tendência* (*trend*) da série. Neste texto, procuraremos usar a palavra *nível* para indicar o valor da série estimado em um instante definido, e *tendência* para indicar a série de valores do nível a cada instante. Algumas vezes, usaremos indistintamente os dois termos, para que a notação aqui seja coerente com a usada na maioria dos livros.

3.2. Extração do tendência

3.2.1. Médias móveis simples

O método mais simples de "amortecer" uma série – isto é, de conseguir uma estimativa suavizada do nível a cada instante, eliminando a sazonalidade e o erro aleatório –, é o de calcular seqüências de médias móveis. A *média móvel* é uma média aritmética dos dados contidos em uma "janela" no tempo; esta média é a estimativa do nível da série no instante central daquela janela. A *ordem m* da média móvel é o número de instantes no tempo que a janela abrange.

Suponhamos por exemplo uma série Z_t, e calculemos as médias móveis M de ordem m=3. A primeira média será calculada pela média das três primeiras observações; esta média é a estimativa do nível no instante t=2:

$$M_2 = \frac{1}{3}(Z_1 + Z_2 + Z_3)$$

Deslocando a janela de tempo um instante à frente, calculamos a segunda média móvel, que será a estimativa do nível no instante t=3:

$$M_3 = \frac{1}{3}(Z_2 + Z_3 + Z_4)$$

Se a série tem N valores, a última média móvel calculada será M_{N-1} :

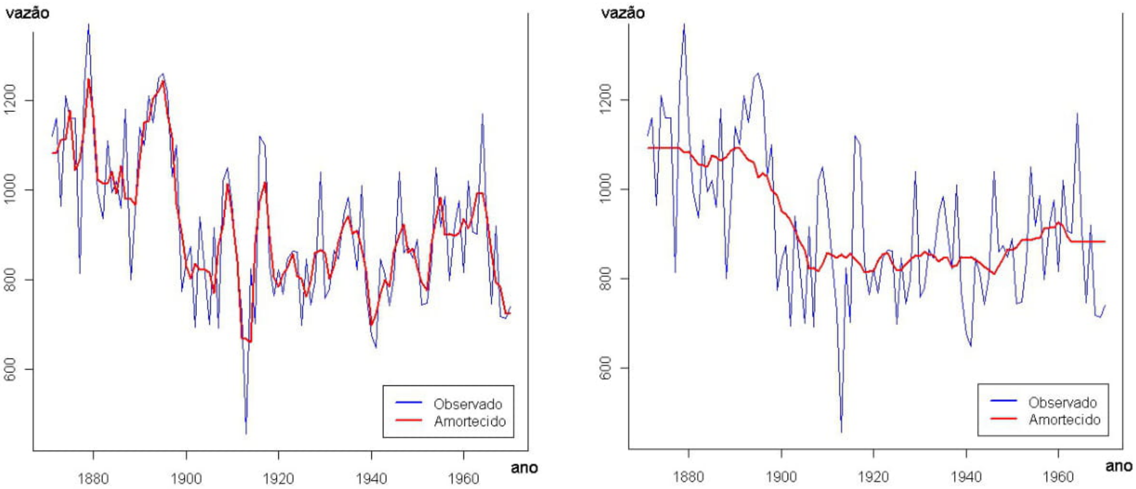
$$M_{N-1} = \frac{1}{3}(Z_{N-2} + Z_{N-1} + Z_N)$$

As médias móveis correspondentes aos extremos da série (M_1 e M_N) não podem ser calculadas.

Do ponto de vista da aplicação prática, o problema é escolher a ordem m que leve a melhores resultados. Quanto maior a ordem, maior será o amortecimento da série (isto é, mais suave será a curva que representa a trajetória do nível). A Fig. **2** mostra, como exemplo, uma série de vazões anuais do rio Nilo, amortecida por médias móveis de ordens m=3 e m=15; é fácil ver que a estimativa do nível na Fig. **2B** (m=15) é bem mais amortecida do que a da Fig. **2A** (m=3). Em termos estatísticos, isto é equivalente ao que acontece quando tomamos médias de amostras aleatórias: quanto maior a amostra, mais reduzido será o efeito da aleatoriedade (isto é, menor o erro amostral), e melhor será a estimativa da média populacional; nas séries temporais, quanto maior a ordem, melhor será a estimativa do nível.

As médias móveis de ordens elevadas, no entanto, levam à perda de estimativas do nível em muitos dos instantes iniciais e finais da série. Se a série tem M observações, e a ordem da média móvel é m = 3, como no exemplo acima, não poderão ser calculadas as médias, M_1 *e* M_N. Para médias móveis de ordem m qualquer, a primeira média calculada irá corresponder ao instante $t=(m+1)/2$; a última irá corresponder ao instante $t=N-(m-1)/2$.

Portanto, quanto maior a ordem m, maior será a quantidade de valores do nível, nos extremos da série, que não poderão ser estimados.



A. Médias móveis de ordem 3 B. Médias móveis de ordem 15

Figura 2. Nível anual do rio Nilo, nível amortecido por médias móveis

Os valores perdidos no início da série geralmente não têm muita importância; os valores perdidos no final, contudo, podem causar dificuldades, se quisermos usá-los como pontos de partida para previsões do nível. Suponha que a série original tenha N observações, e queremos fazer previsões para o instante $t=N+1$. Se usamos médias móveis de ordem m=5 para amortecer a série, não haverá estimativas do nível para os instantes $t=N-1$ e $t=N$; teremos que conseguir estas estimativas de outra forma, antes de fazer previsões para $t=N+1$.

Nos gráficos da Fig. 2, usamos a solução mais simples para obter estas estimativas faltantes: repetimos os valores da primeira e da última média calculadas. A série tem N=106 observações. No gráfico B, a primeira e a última médias são, respectivamente:

$$M_8 = \frac{1}{15}(Z_1 + Z_2 ... + Z_8 + ... + Z_{14} + Z_{15})$$

$$M_{99} = \frac{1}{15}(Z_{92} + Z_{93} + ... Z_{99} + ... + Z_{105} + Z_{106})$$

Fizemos as estimativas de todos os valores do nível entre os instantes t=1 a t=7 como iguais a M_8, e todos os valores entre os instante t=100 a t=106 como iguais a M_{99}.

Outra forma de obter as estimativas para o nível nos instantes finais da série é diminuir progressivamente o tamanho das janelas móveis. Por exemplo, se usamos m=7 na maior parte da série, calculamos a estimativa para os três últimos instantes usando ordens 5, 3 e 1:

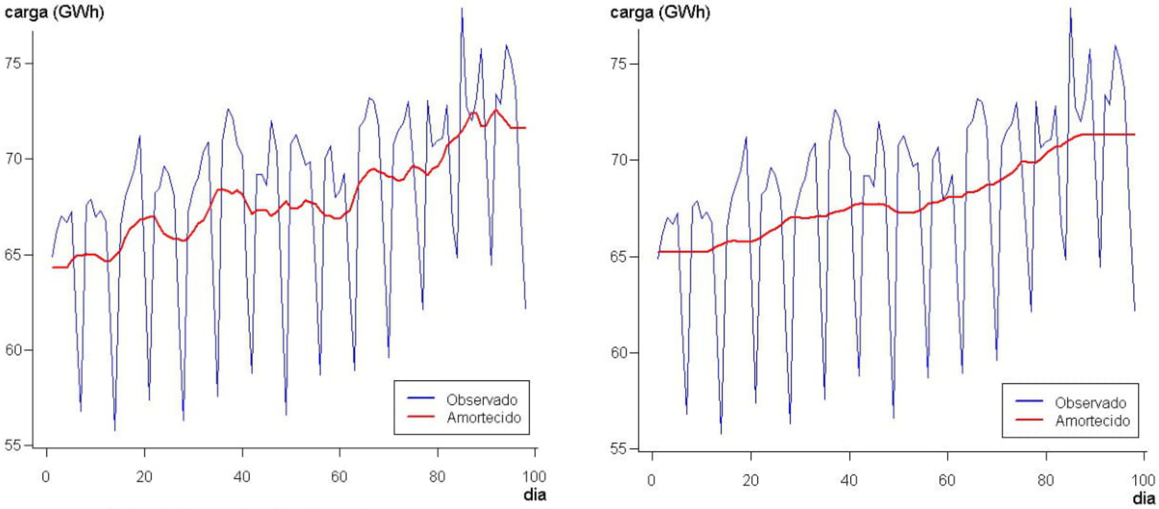
$$M_{N-2} = \frac{1}{5}(Z_{N-4} + Z_{N-3} + Z_{N-2} + Z_{N-1} + Z_N)$$

$$M_{N-1} = \frac{1}{3}(Z_{N-2} + Z_{N-1} + Z_N)$$

$$M_N = Z_N$$

É claro que estas estimativas não terão a mesma qualidade das estimativas anteriores, feitas com janelas maiores; para termos resultados melhores, será preciso usar métodos mais complicados, como as *médias ponderadas assimétricas* (Seção 3.2.3).

No caso de séries sazonais, não há muita dificuldade na escolha do m: ele deve ser igual ao período sazonal, ou a um múltiplo deste. Por exemplo, a série de cargas elétricas diárias de uma cidade mostrada na Fig. **3** tem período sazonal s=7 : há uma sazonalidade semanal, já que o consumo é mais alto nos dias de semana, e cai no fim-de-semana. A Fig. **3A** mostra o nível estimado usando médias móveis de m=7; a janela móvel inclui uma observação para cada um dos dias da semana. Na Fig. **3B**, o nível é estimado por m=21; a janela móvel inclui agora três observações para cada dia da semana, o que resulta numa estimativa mais amortecida. Em ambos os gráficos, as estimativas nos extremos da série foram obtidas repetindo-se a primeira e a última médias disponíveis.



A. Médias móveis de ordem m=7

B. Médias móveis de ordem m=21

Figura 3. Consumo diário de energia elétrica em uma cidade

3.2.2. Médias móveis duplas (ou centradas)

Nos exemplos vistos até agora, as médias móveis tinham ordem ímpar. Se uma série tem período sazonal par (por exemplo, séries de dados trimestrais, com sazonalidade s=4; ou dados mensais, com sazonalidade s=12), será preciso usar *médias duplas* (ou *centradas*). A idéia é calcular duas médias de ordem m, e depois tirar a média das duas.

Suponha, por exemplo, a série de consumo trimestral de energia mostrada na Fig. **4**. A primeira média móvel a utilizar deverá ser ordem m_1=4, igual ao período sazonal. Se calculamos esta primeira média móvel por meio de :

$$M_{2,5} = \frac{1}{4}(Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4)$$

obtemos uma estimativa do nível que corresponderia ao instante t=2,5 - o que não faz sentido na prática. Deslocando a janela móvel um instante à frente, calculamos a estimativa correspondente ao instante t=3,5:

$$M_{3,5} = \frac{1}{4}(Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5)$$

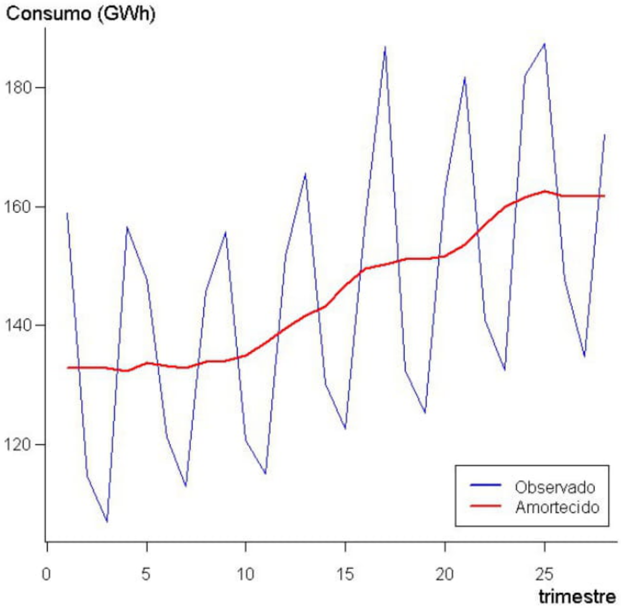


Figura 4. Consumo trimestral de energia elétrica em uma cidade

Tirando a média destes dois valores (isto é, uma média móvel de ordem m_2=2), representada por $M^{[2]}$, encontramos uma estimativa do nível no instante t=3:

$$M_3^{[2]} = \frac{1}{2}(M_{2,5} + M_{3,5})$$

Esta média $M^{[2]}$ corresponde na verdade a uma média *ponderada* de ordem m=5:

$$M_3^{[2]} = \frac{1}{2}\left(\frac{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4}{4} + \frac{Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5}{4}\right)$$

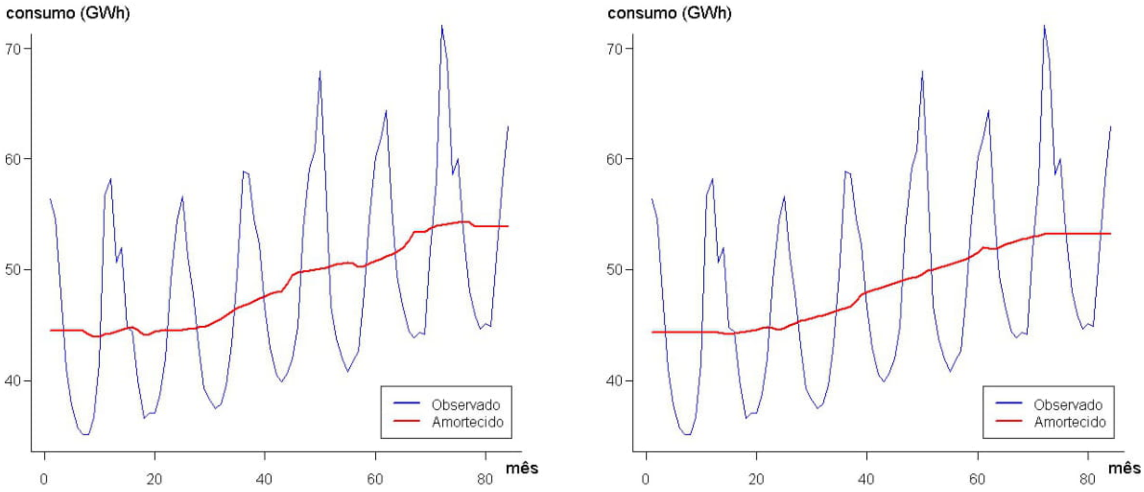
$$M_3^{[2]} = \frac{1}{8}(Z_1 + 2Z_2 + 2Z_3 + 2Z_4 + Z_5) \qquad \textbf{(1)}$$

Representaremos a ordem desta média móvel como *2 × 3* - isto é, uma média móvel de ordem m_2=2 sobre as médias móveis de ordem m_1=3. Note que esta média leva em conta o mesmo número de observações para cada trimestre do ano: no exemplo, as do observações do 2º, 3º e 4º trimestres têm pesos igual a dois; a do 1º trimestre de um ano (Z_1) são somadas com a do 1º trimestre do ano seguinte (Z_5). Portanto, cada trimestre aparece duas vezes na média.

A média dupla é usada freqüentemente para amortecer séries mensais. Os gráficos da Fig. **5A** mostram uma série de consumo mensal de energia de uma cidade, amortecidos por médias móveis duplas de ordem 2×12.

É claro que médias com ordens múltiplas da período sazonal também serviriam; por exemplo, médias duplas de ordem 2×24, como na Fig. **5B**. O amortecimento seria maior, como pode ser visto comparando as figuras A e B; o problema, contudo, é a quantidade de dados perdidos nos dois extremos da série de estimativas (12 em cada extremo).

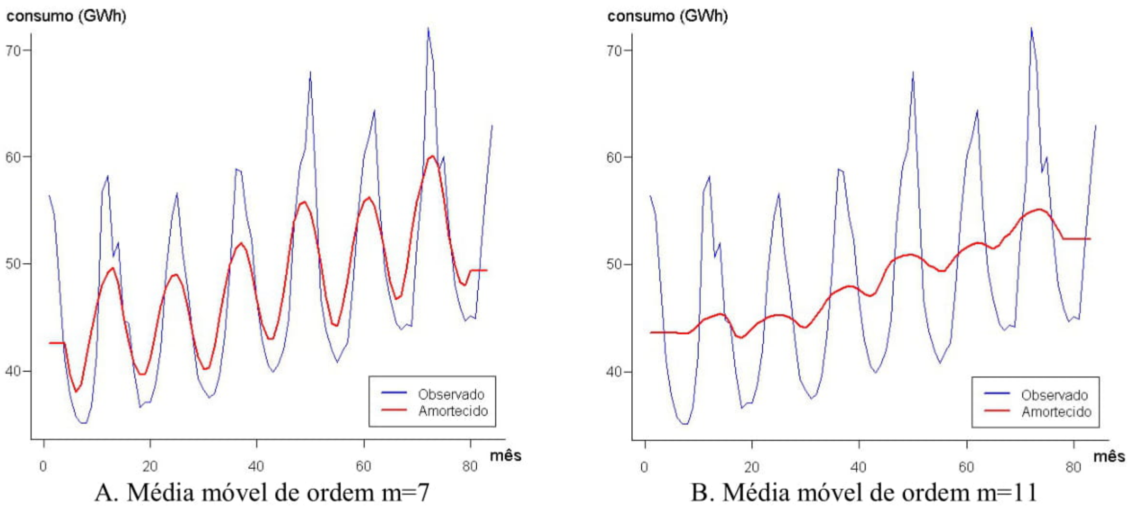
É importante notar que, para séries sazonais, a "dessazonalização" (isto é, a remoção do efeito da sazonalidade) só é obtida se a ordem m da média for igual ao período sazonal s, ou a um múltiplo deste.



A. Médias móveis de ordem m=2×12 B. Médias móveis de ordem m=2x24

Figura 5. Consumo mensal de energia em uma cidade – amortecimento por médias móveis duplas

Se $m < s$, alguns instantes do ciclo sazonal não estarão representados na média, que ficará tendenciosa; se $m > s$, alguns instantes estarão na média com mais freqüência que outros, o que novamente levará a um resultado tendencioso. Se usamos média móvel de ordem m=8, por exemplo, para amortecer uma série semanal (s=7) de consumo de energia, um mesmo dia da semana será incluído duas vezes na média, o que irá enviesar a estimativa (suponha por exemplo que a janela vá de um domingo até outro domingo; haverá dois domingos incluídos, o que deverá resultar numa média mais baixa que o valor correto). A Fig. 6 mostra o que acontece se tentarmos amortecer a série mensal (s=12) da Fig. 5 por meio de médias móveis simples de ordens m=7 ou m=11; é bem evi-dente que o efeito da sazonalidade não foi totalmente eliminado das estimativas do nível.



A. Média móvel de ordem m=7 B. Média móvel de ordem m=11

Figura 6. Consumo mensal de energia elétrica, amortecimento por médias móveis

Nos exemplos da Fig. 5, usamos médias móveis duplas de ordens *pares* (2×4 e 2×12). Também podem ser feitas médias móveis duplas de ordem *ímpar*, sobre séries de médias móveis de ordem ímpar ou par; a utilidade disto é conseguirmos médias ponderadas (ao invés de médias simples), com diferentes conjuntos de pesos. Por exemplo, para calcularmos médias móveis duplas 3×3, calculamos primeiro seqüências de médias móveis simples de ordem m_1=3:

$$M_2 = \frac{1}{3}(Z_1 + Z_2 + Z_3)$$

$$M_3 = \frac{1}{3}(Z_2 + Z_3 + Z_4)$$

$$M_4 = \frac{1}{3}(Z_3 + Z_4 + Z_5)$$

Depois, as médias móveis duplas também de ordem m_2=3:

$$M_3^{[2]} = \frac{1}{3}(M_2 + M_3 + M_4) = \frac{1}{3}\left(\frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{3} + \frac{Z_2 + Z_3 + Z_4}{3} + \frac{Z_3 + Z_4 + Z_5}{3}\right)$$

$$M_3^{[2]} = \frac{1}{9}(Z_1 + 2Z_2 + 3Z_3 + 2Z_4 + Z_5) \qquad (2)$$

O resultado, portanto, é uma média móvel ponderada de ordem *m*=5, onde os pesos formam uma seqüência de valores que crescem e decrescem simetricamente:

```
pesos: 0,111  0,222  0,333  0,222  0,111
```

Compare esta seqüência de pesos com aquela gerada por uma média móvel dupla 2×4, no exemplo acima (eq. **1**, repetida abaixo):

$$M_3^{[2]} = \frac{1}{8}(Z_1 + 2Z_2 + 2Z_3 + 2Z_4 + Z_5)$$

```
pesos: 0,125  0,250  0,250  0,250  0,125
```

3.2.3. Médias móveis ponderadas

Como visto acima, usar médias móveis duplas equivale a atribuir seqüências de pesos desiguais às observações dentro de uma janela. O pesquisador também pode, se quiser, especificar qualquer outra seqüência de pesos que lhe interesse. Em geral, uma média móvel ponderada de ordem *m* pode ser escrita como:

$$M_t = \sum_{j=-k}^{k} a_j Z_{t+j}$$

onde *k=(m-1)/2*, e os pesos são representados por a_j. É preciso que a seqüência seja simétrica ($a_j = a_{-j}$), e a soma dos pesos seja igual à unidade. As médias móveis simples são casos particulares das média ponderada, onde os pesos são todos iguais ($a_j = 1/m$, para qualquer *j*). Veremos depois que as médias móveis ponderadas, por sua vez, são um caso particular dos *filtros lineares* (Seção 6.5). Por exemplo, a média móvel 2×3 em (**2**) pode ser escrita uma média simples ponderada da forma:

$$M_{t=3} = \sum_{j=-2}^{2} a_j Z_{t+j} = a_{-2} Z_{3-2} + a_{-1} Z_{3-1} + a_0 Z_3 + a_{+1} Z_{3+1} + a_{+2} Z_{3+2}$$

$$M_3 = 0{,}111 \times Z_1 + 0{,}222 \times Z_2 + 0{,}333 \times Z_3 + 0{,}222 \times Z_4 + 0{,}111 \times Z_5$$

Os pesos são, portanto:

a_0=0,333 a_1=0,222 a_2=0,111

Há várias seqüências de pesos que são bastante usadas na prática, e algumas são conhecidas pelos nomes dos pesquisadores que as propuseram. Por exemplo, o Quadro 1, abaixo, mostra algumas das seqüências de pesos resultantes de médias móveis simples ou duplas, comparadas com as seqüências propostas por Spencer e por Henderson [1].

As seqüências destes pesos são sempre simétricas, portanto a_j=a_{-j}. O gráfico da Fig. 7A mostra a seqüência de 15 pesos sugeridas no método *S15*, de Spencer. Em geral, as seqüências têm formas similares a esta: os pesos são simétricos e decrescem em torno do peso correspondente ao instante em que está centrada a janela móvel.

Ordem	**a0**	**a1**	**a2**	**a3**	**a4**	**a5**	**a6**	**a7**	**a8**	**a9**	**a10**	**a11**	
Média móvel simples													
3	0,333	0,333											
5	0,200	0,200	0,200										
Médias móveis duplas													
2x4	0,250	0,250	0,125										(eq. 3.2.2.a)
2x12	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,042						
3x3	0,333	0,222	0,111										(eq. 3.2.2.b)
3x5	0,200	0,200	0,133	0,067									
Pesos propostos por Spencer													
S15	0,231	0,209	0,144	0,066	0,009	-0,016	-0,019	-0,009					
S21	0,171	0,163	0,134	0,096	0,051	0,017	-0,006	-0,014	-0,014	-0,009	-0,003		
Pesos propostos por Henderson													
H5	0,558	0,294	-0,073										
H9	0,330	0,267	0,119	-0,010	-0,041								
H13	0,240	0,214	0,147	0,066	0,000	-0,028	-0,019						
H23	0,148	0,138	0,122	0,097	0,068	0,039	0,013	-0,005	-0,015	-0,016	-0,011	-0,004	
Pesos propostos por Makridakis *et al*.													
M19	0,104	0,102	0,094	0,082	0,067	0,050	0,033	0,016	0,005	0,000			

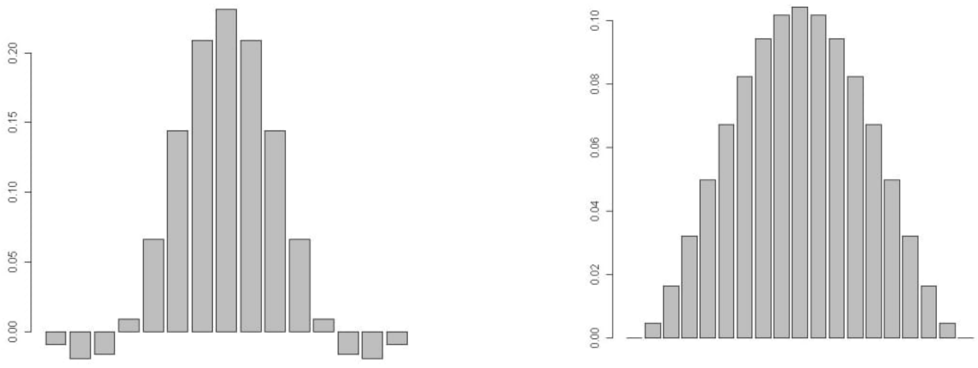
Quadro 1. Seqüências de pesos sugeridas para médias ponderadas

As seqüências de pesos sugeridas por Spencer e por Henderson não foram criadas arbitrariamente, mas surgiram de diversas combinações de médias móveis e triplas. Em geral, qualquer função que gere pesos simétricos pode ser usada. Por exemplo, em [1] é proposta esta função quadrática para gerar seqüências de pesos:

$$Q(j)=\begin{cases}[(1-(j/k)^2]^2 & para -k<j<k\\ 0 & para\ |\ j|>k\end{cases} \quad \text{onde} \quad k=\frac{m-1}{2}$$

$$a_j=\frac{Q(j)}{\sum_{i=-k}^{k}Q(i)}$$

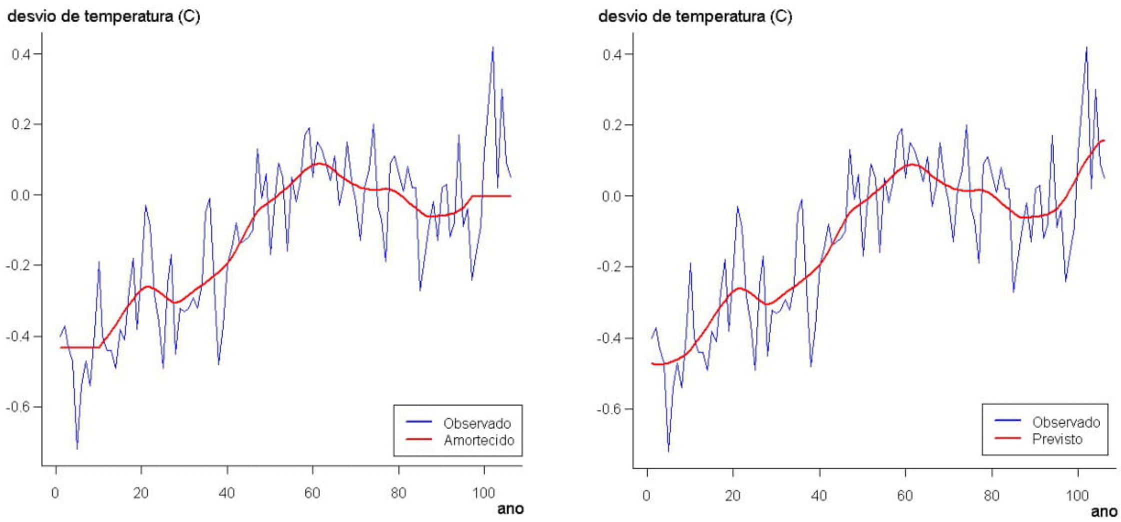
Para uma média móvel ponderada de m=19, a seqüência de pesos gerada está repre-sentada no gráfico da Fig. 7B. A série de temperaturas médias anuais globais, e o nível amortecido por médias ponderadas por estes pesos, estão na Fig. 8A.



A – Spencer, n=15 B – Makridakis, n=19

Figura 7 – Seqüências de pesos sugeridas para médias ponderadas

A vantagem destas médias ponderadas, em relação à média simples, é que a estimativa da tendência será mais suave. Na média móvel simples, a cada momento em que a janela de tempo é deslocada para frente uma nova observação entra no cálculo, e a observação mais antiga é descartada. Se estas duas observações têm valores muito desiguais entre si, a média móvel sofrerá uma grande variação. Nas médias ponderadas, as observações nos extremos da janela têm pouco peso; portanto a entrada ou saída de observações tem pouco efeito imediato sobre o valor da média.



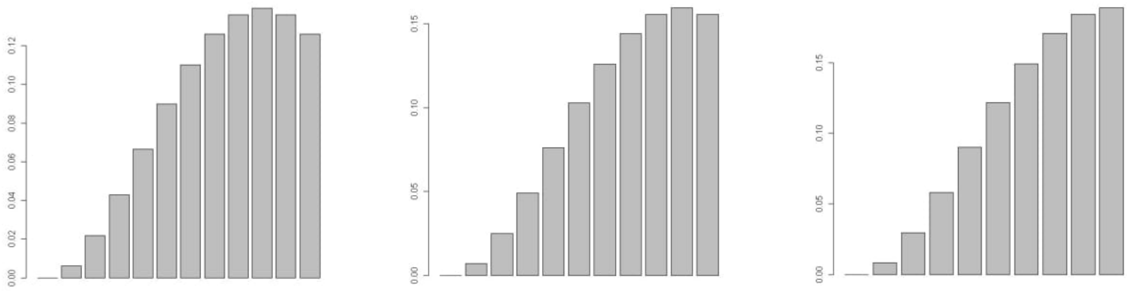
A. Com pesos M19 B. Com pesos M19, ponderação assimétrica

Figura 8 – Amortecimento da série *globtp*

A dificuldade no uso de qualquer método de amortecimento por médias móveis, ponderadas ou não, é estimar o nível nos extremos da série (problema já mencionado na seção 3.2.1). Se as médias são ponderadas por uma função determinada pelo pesquisador, como as da Tabela 1, podemos usar séries assimétricas de pesos. Por exemplo, se amortecemos uma série de N observações usando o método M19, os pesos assimétricos para os últimos nove últimos instantes ($t=N-8$ a $t=N$) serão dados por:

$$a_j = \left(1 - \frac{j^2}{81}\right)^2 \frac{1}{\sum_{i=-9}^{N-t} Q(i)} \qquad j = -9, -8, \ldots, N-t$$

A Fig. 9 mostra as seqüências de pesos para os três últimos instantes de uma série. A Fig. **8B** mostra a série de `globtp` com o nível estimado por meio da seqüência de pesos M19, usando pesos assimétricos nos extremos da série. O método consegue estimativas nos extremos que parecem bem melhores do que as conseguidas pela simples repetição de valores (Fig. **8A**). Contudo, se há uma tendência crescente, as estimativas feitas nos extremos da série serão sempre enviesadas, qualquer que seja o método baseado em médias móveis: se o nível está se elevando, o nível a cada instante será provavelmente superior à média das observações passadas (ponderadas ou não).



A. Pesos no instante t=N-2 B. Pesos no instante t=N-1 C. Pesos no instante t=N

Figura 9

Em geral, para fins de análise (que é o objetivo principal da técnica de decomposição), o erro das estimativas nos extremos da série não importa muito, especialmente se a série for longa; se as estimativas nos extremos forem realmente importantes, contudo, uma solução possível é abandonar os métodos baseados em médias móveis, e usar métodos baseados em *regressão local*, vistos na próxima seção.

3.2.4. Regressão local e loess

Se a série tem uma tendência bem marcada, uma extensão natural dos métodos acima seria o de ajustar dentro de cada janela móvel um modelo linear ou quadrático, ao invés de simplesmente calcular uma média; em seguida, usar o valor obtido pelo modelo como estimativa do nível no instante central da janela. Se usamos o modelo linear em janelas de ordem m, a estimativa do nível no instante t será dada por:

$$T_t = a + bt$$

onde a e b são os parâmetros da reta de regressão, que deverão ser re-estimados a cada instante. Para isto, o método usual é o de minimizar a soma dos quadrados dos erros dentro da janela (SQE), dada por:

$$SQE = \sum_{j=-k}^{k} [Z_{t+j} - T_{t+j}]^2 \qquad \text{onde} \quad k = \frac{m-1}{2}$$

Este é o método de *mínimos quadrados ordinários*, o mais freqüentemente usado para ajustar modelos lineares de regressão.

A Fig. **10** mostra um exemplo da estimação do nível por regressão linear local, num trecho da série `globtp`. Uma janela móvel de m =11 é ajustada sobre os instantes t=40 a t=51 (a janela está destacada no gráfico, com fundo cinza). Uma reta de regressão é ajustada neste intervalo; o valor calculado pelo modelo no centro da janela (t=46) será a estimativa do nível neste instante (indicada no gráfico por uma cruz). A seguir, a janela é movida um instante à frente (t=41 a t=52), uma nova reta é ajustada, e o valor correspondente ao instante t=47 será a estimativa do nível neste instante. Criando uma rotina em R que ajusta recursivamente estas retas de regressão, obtemos a série de estimativas do nível mostradas na Fig. **11B**.

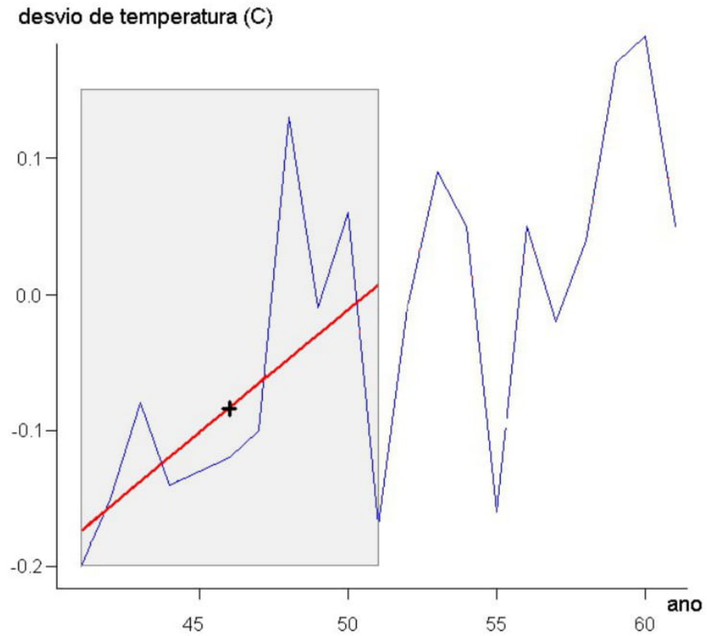


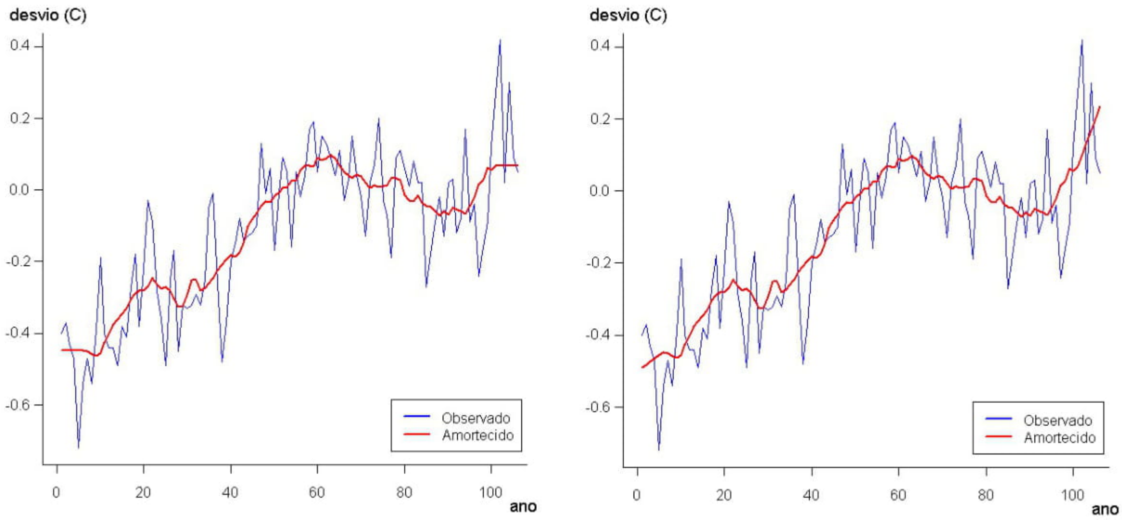
Figura 10 – Estimativa do valor amortecido em *t*=46. Amortecimento por regressão local, *n*=11

Como no caso da média móvel, não teremos estimativas para os primeiros cinco valores, e para os cinco últimos; o problema pode ser resolvido simplesmente prolongando a reta obtida na primeira janela (t=1 a t=11), para obtermos as estimativas M_1 a M_5 , e prolongando a reta obtida na última janela (t=N-11 a N), para obtermos as estimativas de M_{N-4} a M_N. É fácil demonstrar que o nível estimado por meio de regressão linear simples (não-ponderada) é equivalente ao estimado pela média da janela móvel; a reta de regressão de uma variável Y em uma variável X passa sempre pelo ponto médio (x_{medio},y_{medio}). A regressão linear simples, portanto, só tem utilidade especial nos instantes do início e do fim da série, pois pode fornecer estimativas do nível nestes instantes melhores do que as conseguidas pela média móvel (compare as estimativas por média e por regressão, na Fig. **11**, especialmente no final da série).

A estimação do nível por regressão pode conseguir resultados mais interessantes, porém, se procurarmos minimizar a soma dos quadrados *ponderados* dos erros dentro de cada janela, dada por:

$$SQPE = \sum_{j=-k}^{k} \beta_j [Z_{t+j} - T_{t+j}]^2$$

A estimativa da tendência resultante será uma curva mais suave (com maior amortecimento) do que a obtida pela regressão simples. A idéia é similar à usada nas *médias móveis ponderadas* (Seção 3.2.3), e as mesmas seqüências de pesos já vistas podem ser usadas para fornecer os coeficientes β_j. As equações para o ajuste das retas de regressão, contudo, são bem mais complicadas, e não serão vistas aqui.



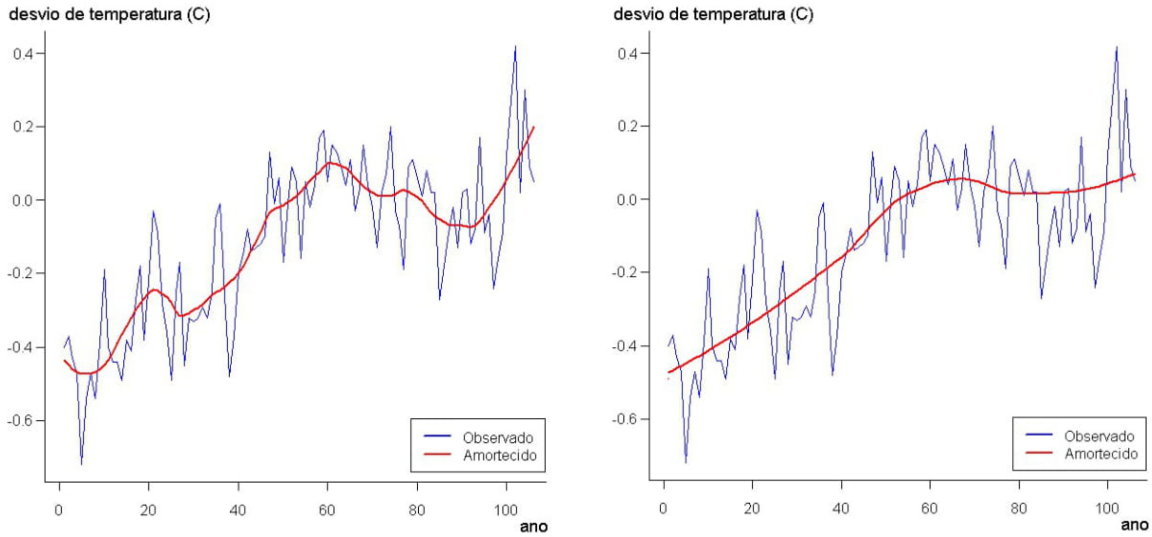
A. Média móvel, ordem n=5 B. Regressão local, ordem n=5

Figura 11. Série *globtp*, amortecimento por média móvel *vs.* regressão local

Um método também baseado em regressão local, e encontrado na maioria dos pacotes estatísticos, é o de regressão *loess*. Este é um método iterativo que ajusta curvas de primeiro ou segundo grau (retas ou parábolas) a cada ponto, e procura reduzir o efeito, na estimação destas curvas, dos pontos discrepantes existentes na série. Em cada janela, é calculada primeiramente uma regressão local com ponderação; a seguir, os resíduos desta regressão (isto é, a diferença entre os valores previstos pela reta e os valores observados) são examinados. Se houver resíduos muito grandes, devidos a pontos discrepantes (muito afastados da reta), a ponderação é modificada, e os pesos correspondentes a estes pontos são reduzidos. Isto diminui o impacto que pontos discrepantes possam ter sobre o cálculo da curva, fazendo que o método seja mais robusto. A curva é então re-calculada com a nova ponderação, e os resíduos são examinados novamente. O procedimento continua até que a curva esteja estabilizada, e não seja mais necessário alterar os pesos.

3.3. Extração da sazonalidade

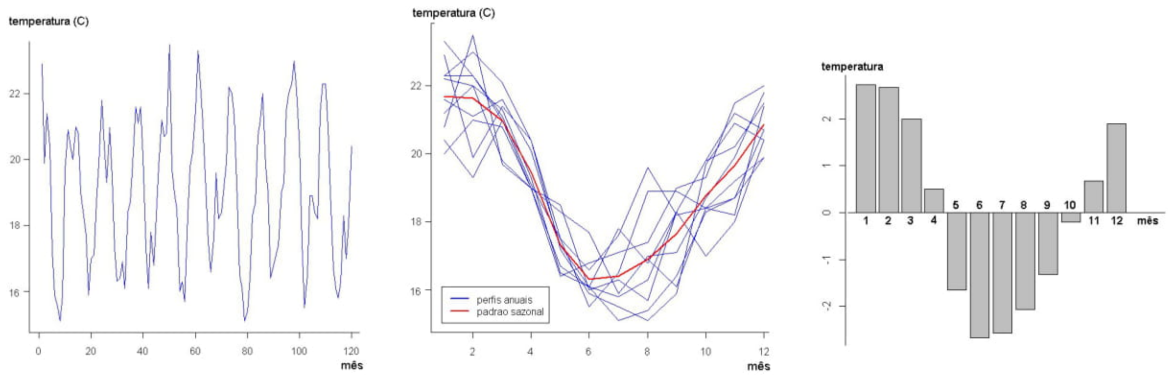
Se a série tem nível constante (isto é, não existe tendência), o padrão sazonal pode ser estimado por meio de médias e razões. Se a série é anual, por exemplo, calculamos a média dos valores observados a cada mês: a média dos valores em janeiro, a média dos valores em fevereiro, etc. Para obter os *fatores sazonais*, subtraímos destas médias o nível da série (se for usado um modelo aditivo, Seção 3.4.1), ou calculamos a razão entre estas médias e o nível da série (se for usado um modelo multiplicativo, Seção 3.4.2).



A. Usando *span* = 0.25 B. Usando *span* = 0.75

Figura 12 – Amortecimento da série `globtp` usando *loess*

A Fig. **13A** mostra, como exemplo, a série temperaturas mensais em Juiz de Fora (MG), durante um período de 10 anos. A Fig. **13B** mostra os perfis de cada ano, sobrepostos; este gráfico é chamado por alguns autores de “gráfico sazonal” (*seasonal plot*). A média destes perfis (em vermelho), subtraída do nível médio da série, é a estimativa dos fatores sazonais, que se repetem a cada ano (Fig. **13C**).



A. Temperaturas médias mensais B. Padrão sazonal C. Fatores sazonais

Figura 13 - Temperaturas médias mensais em Juiz de Fora, 1990-1999

Se o nível não for constante (isto é, se houver uma tendência na série), será preciso primeiro extrair a tendência, como veremos abaixo.

3.4. Decomposição clássica

Os processos de decomposição extraem primeiro a *tendência* da série; extraem depois a *sazonalidade*, e o que resta é o *resíduo*. O processo “clássico” de decomposição usa médias móveis para estimar a tendência; processos mais modernos usam técnicas mais complicadas, como por exemplo o *loess*. (No R, processos usando médias móveis e *loess* estão implementados nas funções `decompose` e `stl`, respectivamente, e serão vistos na Seção 3.5). A decomposição pode seguir modelos aditivos ou multiplicativos.

3.4.1. Decomposição seguindo modelo aditivo

Neste modelo, os componentes são somados entre si, desta forma:

$$Z_t = T_t + S_t + E_t$$

onde T_t: tendência, S_t: sazonalidade e E_t: resíduo. Este modelo pressupõe que a amplitude da variação sazonal seja independente do nível da série. Como exemplo, tomaremos uma série de consumo de energia elétrica de uma cidade, durante sete anos; os dados são mensais e a série contém portanto 7×12=84 observações. O período sazonal é s=12. O procedimento é:

(i) Amortecer a série usando uma média móvel dupla 2×12. A série amortecida será uma estimativa da tendência T_t

(ii) Remover a tendência da série, calculando a série sem tendência Z' (*detrended series*); para isto, subtraímos da série original Z_t a estimativa de T_t obtida em (i):

$$Z'_t = Z_t - T_t = S_t + E_t$$

A série Z_t' é constituída apenas pelos componentes sazonal S_t e erro E_t.

(iii) Estimar o componente sazonal S_t, constituído por uma seqüência de 12 índices sazonais (um para cada mês). Para calcular estes índices, o procedimento é:

- tirar a média M da série sem tendência Z'_t:

$$M = \frac{1}{84}\sum_{t=1}^{84} Z'_t$$

- calcular o fator sazonal de um mês i (S_i) pela diferença entre a média das observações feitas naquele mês, durante os sete anos, e média M da série. Para o mês de janeiro, por exemplo, a média do mês (M_{jan}) será calculada por:

$$M_{jan} = \frac{1}{7}(Z'_1 + Z'_{13} + Z'_{25} + Z'_{37} + Z'_{49} + Z'_{61} + Z'_{73})$$

O fator sazonal do mês de janeiro (S_{jan}) será dado pela diferença entre esta média do mês e a média de toda a série:

$$S_{jan} = M_{jan} - M$$

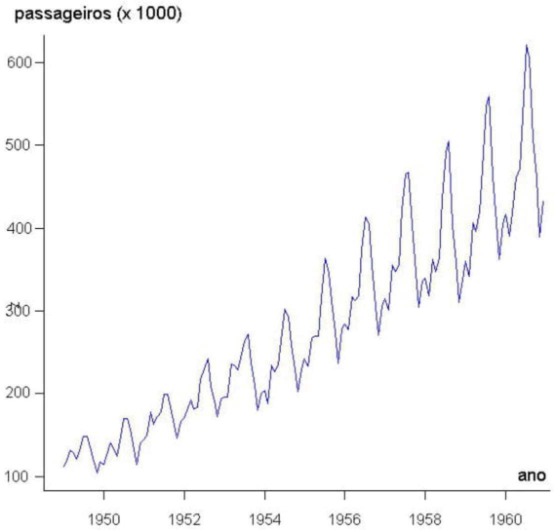
A seqüência de fatores sazonais correspondentes a série original é feita repetindo a série de 12 índices mensais, ano após ano.

(iv) Estimar o componente aleatório, subtraindo da série sem tendência Z' o componente sazonal S estimado em (iii).

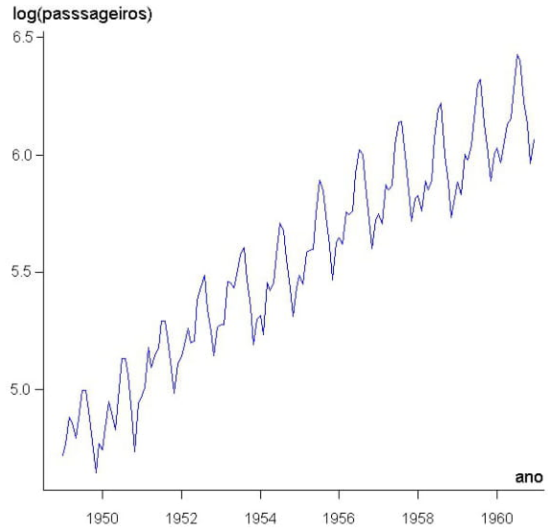
Estes passos podem ser ilustrados graficamente por um “gráfico de decomposição” (*decomposition plot*), que mostra, em quatro painéis superpostos, a série original e seus três componentes: a tendência, o componente sazonal e o erro aleatório (Fig. **17**). Usaremos esta série nos exemplos de decomposição usando funções do R, na Seção 3.3.3).

3.4.2. Decomposição seguindo modelo multiplicativo

O modelo multiplicativo é mais comumente usado quando a amplitude da variação sazonal não é constante ao longo da série, mas aumenta com a elevação do nível. Isto pode ser observado, por exemplo, na série da Fig. **14A**, que mostra o número mensal de passageiros (em milhares) em viagens aéreas internacionais de 1949 a 1960 (esta série, chamada no R de *AirPassengers*, do pacote `datasets`, é provavelmente o exemplo mais citado na literatura sobre séries temporais).



A - Valores originais



B – Logaritmos dos valores originais

Figura 14. Série *AirPassengers*

Há duas maneiras de decompor esta série. A primeira, é tentar transformá-la, de modo a estabilizar a variância; se isto for conseguido, o modelo aditivo poderá ser usado. A transformação mais comum é a *logarítmica*. Calculando os logaritmos da série original, obtemos a série na Fig. **14B**. A variação sazonal parece agora bastante regular, e um modelo aditivo pode ser tentado.

A segunda opção, adotada a seguir, é a de fazer a decomposição segundo um modelo multiplicativo:

$$Z_t = T_t \times S_t \times E_t$$

onde T_t: tendência, S_t: sazonalidade e E_t = resíduo. O procedimento a ser seguido é :

(1) Amortecer a série usando uma média móvel dupla 2×12. A série amortecida será uma estimativa da tendência T_t

(2) Remover a tendência da série, calculando a série sem tendência Z'_t; para isto, calcular a razão entre a série original e a estimativa de T_t obtida (i):

$$Z'_t = \frac{Z_t}{T_t} = \frac{T_t S_t E_t}{T_t} = S_t E_t$$

(v) Estimar o componente sazonal, constituído de uma seqüência de 12 índices sazonais. Para calcular estes índices, o procedimento é:
- tirar média M da série sem tendência Z'_t :

$$M = \frac{1}{84}\sum_{t=1}^{84} Z'_t$$

- calcular o fator sazonal de um mês i (S_i) pela razão entre a média das observações feitas naquele mês, durante os sete anos, e média M da série. Para o mês de janeiro, por exemplo, a média daquele mês (M_{jan}) será calculada por:

$$M_{jan} = \frac{1}{7}(Z'_1 + Z'_{13} + Z'_{25} + Z'_{37} + Z'_{49} + Z'_{61} + Z'_{73})$$

O fator sazonal do mês de janeiro (S_{jan}) será dado pela razão entre a média deste mês e a média de toda a série:

$$S_{jan} = \frac{M_{jan}}{M}$$

A seqüência de fatores sazonais correspondente a série original é feita repetindo a série de 12 índices mensais, ano após ano.

(vi) estimar o resíduo, dividindo a série Z'_t pelo componente sazonal estimado em (iii). Se o instante t corresponde a um mês de janeiro, isto significa:

$$E_t = \frac{Z'_t}{S_{jan}} = \frac{S_{jan}E_t}{S_{jan}}$$

O gráfico da Fig. 15 mostra o resultado desta decomposição, feita em R. Note que a série de resíduos não parece ter variância constante, o que é uma indicação de que o modelo não é inteiramente adequado.

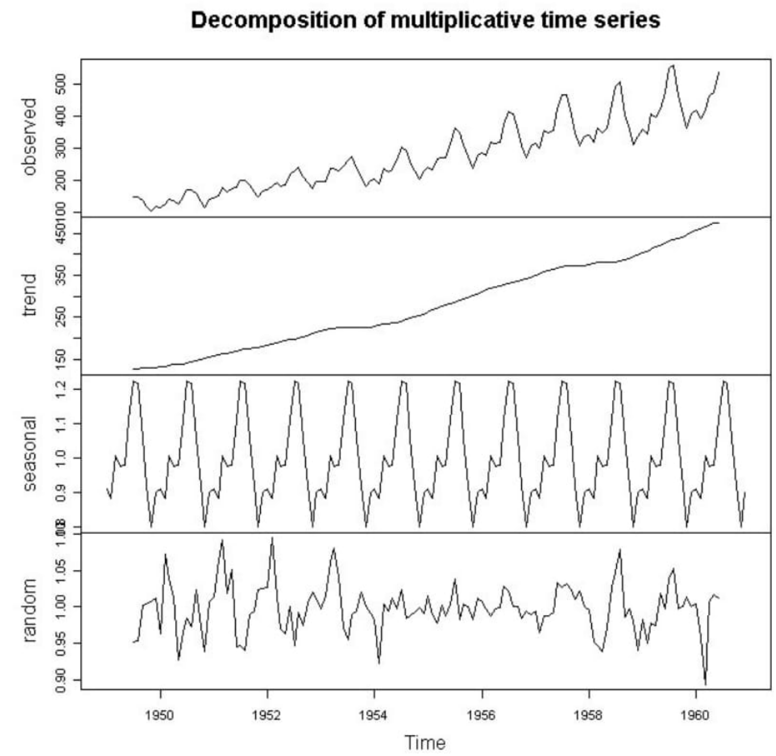


Figura 15. Decomposição da série *AirPassengers*, usando a função decompose

3.5. Funções do R para a decomposição de séries

Há duas funções no R, ambas no pacote `stats`, que fazem a decomposição de séries temporais : a função `decompose`, que usa médias móveis, e a função `stl`, que usa `loess`. Mostraremos abaixo exemplos do uso destas duas funções para decompor uma série de consumo mensal de energia elétrica em uma cidade dos EUA (a mesma série usada na Fig. 1).

3.5.1. Decomposição usando a função `decompose`*.*

Esta função faz a decomposição 'clássica' usando um modelo aditivo, e estima a tendência e os fatores sazonais por meio de médias móveis. A série a ser decomposta deve pertencer a classe `ts` (*time series*) de variáveis.

```
z=scan('cargasmensais.txt')
x=ts(z,frequency=12,start=c(1960,1))
plot(x, col='blue')
```

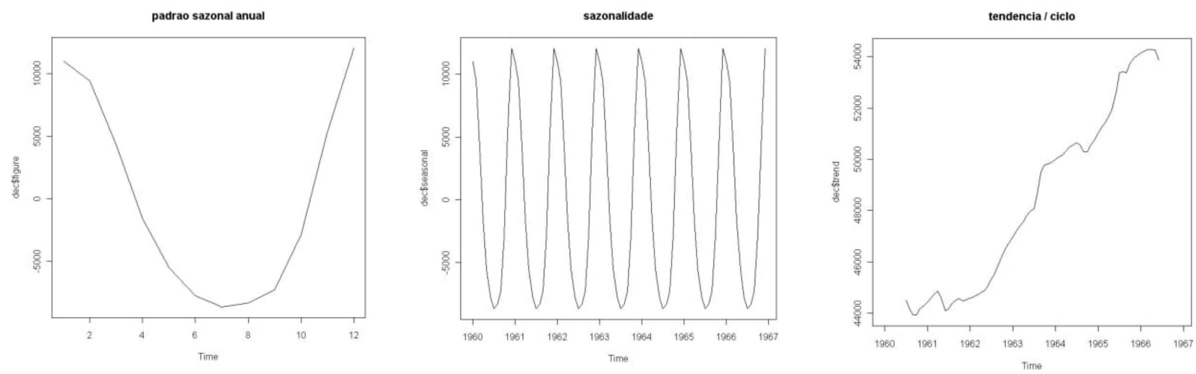
A série abrange sete anos, e tem uma tendência crescente aproximadamente linear. A sazonalidade é bastante clara; o consumo é mais baixo no meio do ano (verão nos EUA), e mais alto no início e final do ano (inverno, quando a eletricidade é usada para o aquecimento).

A função `decompose` retorna um objeto `dec` que tem como campos a série de fatores sazonais estimados (`$figure`), a série constituída pela repetição deste padrão ao longo do período abrangido pelos dados (`$seasonal`), a tendência / ciclo (`$trend`), e os resíduos (`$random`).

```
dec=decompose(x)
dec$figure
# padrao sazonal repetido a cada ano
ts.plot(dec$figure, main="padrao sazonal anual")

# padrao sazonal ao longo dos sete anos da serie
windows()
ts.plot(dec$seasonal, main="sazonalidade")

# tendencia / ciclo
windows()
ts.plot(dec$trend, main="tendencia / ciclo")
```

Estes componentes são representados na Fig. 16. O gráfico de decomposição, mostrando como foi analisada a série, pode ser feito pelo comando `plot` (Fig. 17). Note que a série original de cargas (no painel superior do gráfico) perde parte dos seus dados no início e no final do período – o que é característico dos métodos de amortecimento da tendência por médias móveis. Note também que as janelas não têm todas a mesma escada vertical, o que dificulta a comparação das grandezas relativas dos componentes.

```
windows()
plot(dec)
# decomposition plot
```



A – Fatores sazonais B - Sazonalidade C - Tendência

Figura 16. Componentes da série de cargas mensais (decomposição por `decompose`)

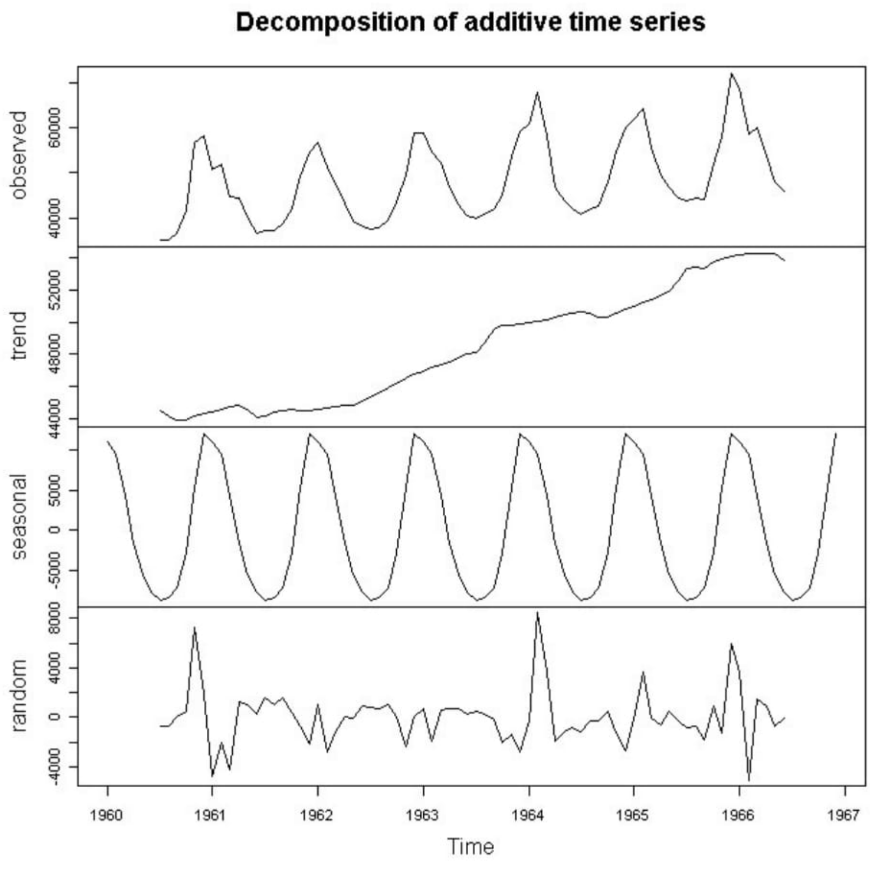


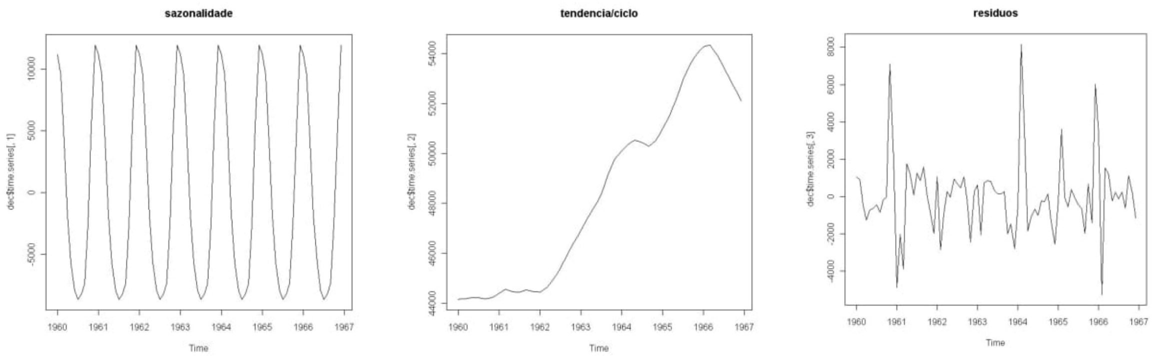
Figura 17. Decomposição da série de cargas mensais (usando função `decompose`)

3.5.2. Decomposição usando a função `stl`.

Esta função estima a tendência usando a técnica de *loess* (discutida na Seção 3.2.4), e retorna um objeto `dec` que pertence a uma classe própria de variáveis, a `stl`. Nos vários campos do objeto estão incluídos os componentes sazonalidade, tendência/ciclo e resíduos, além de vários detalhes sobre o métodos usado para a decomposição.

```
z=scan('cargasmensais.txt')
x=ts(z,frequency=12,start=c(1960,1))

dec=stl(x,s.window="periodic")
class(dec)
names(dec)

# sazonalidade
ts.plot(dec$time.series[,1], main="sazonalidade")

# tendencia/ciclo
windows()
ts.plot(dec$time.series[,2], main="tendencia/ciclo")

# residuos
windows()
ts.plot(dec$time.series[,3], main="residuos")

# decomposition plot
windows()
plot(dec)
```

Estes componentes estão representados na Fig. 18.



A – Sazonalidade B - Tendência C - Resíduo

Figura 18. Componentes da série de cargas mensais (decomposição por `stl`)

O gráfico que reúne estes componentes pode ser feito pelo comando `plot` (Fig. 19). Comparando este gráfico com o da Fig. 17, observamos duas vantagens do método *loess* para a estimativa da tendência, em relação ao de médias móveis. Primeiro, a estimativa da tendência obtida é mais suave (embora isto dependa dos parâmetros escolhidos para o *loess*). Segundo, a série original de cargas (no painel superior do gráfico) não perde dados no início e no fim do período, como aconteceu quando usamos a função `decompose`; a tendência nos extremos da série é estimada pela extrapolação do modelo de regressão local que é a base do método.

Na Fig. 19, note também que as janelas também não têm todas a mesma escada vertical, mas há barras verticais à direito do gráfico, que facilitam a comparação das grandezas relativas dos componentes.

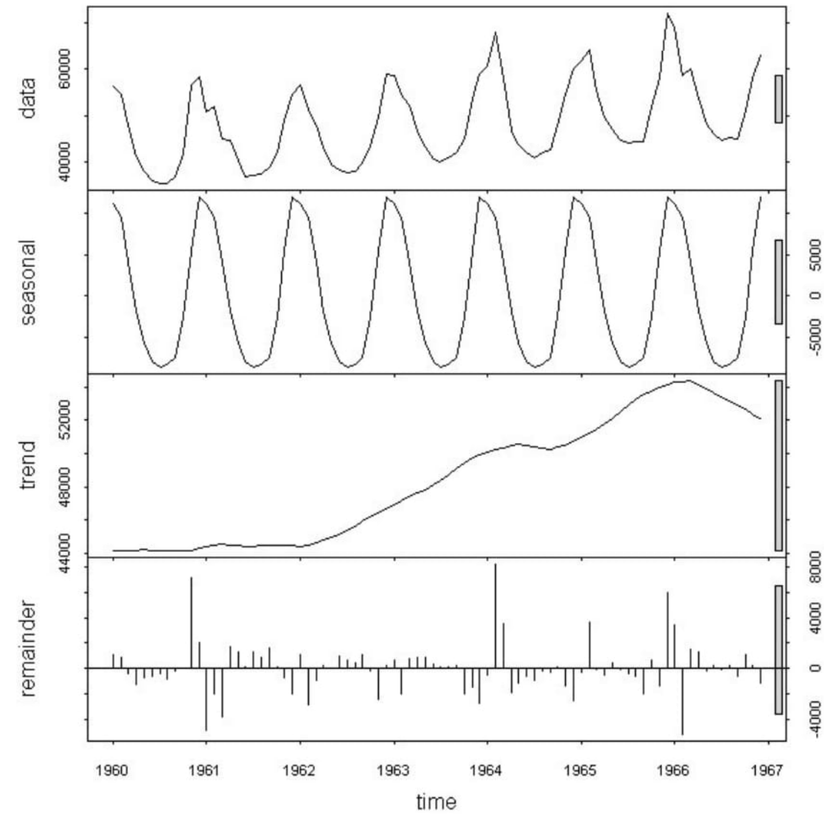


Figura 19. Decomposição da série de cargas mensais (usando função `stl`)

3.6. Conclusão

Os métodos de decomposição são bastante usados para a análise de séries temporais, principalmente na administração e em estudos econômicos. A decomposição serve para apoiar o planejamento; por exemplo, para isolar no valor observado da série a parcela devida à variação sazonal, que deverá estar presente novamente no ano que vem, daquelas devidas à tendência, cujo valor no próximo mês talvez possa ser aproximadamente previsto, e ao erro aleatório, que é essencialmente imprevisível. Além disso, a decomposição é usada para eliminar o efeito da sazonalidade numa série; a série da qual a variação sazonal foi removida é chamada de *série dessazonalizada*. É comum que dados econômicos sejam publicados de forma dessazonalizada, para facilitar comparações dos valores em diferentes instantes, já que comparações na série original nem sempre são possíveis. Se observamos um aumento nas vendas de novembro para dezembro, por exemplo, não podemos concluir daí que a economia sofreu um aquecimento, ou tirar outra conclusão do mesmo gênero - o aumento pode ser apenas conseqüência da proximidade do fim do ano e do Natal. Este efeito provavelmente será passageiro, e no mês seguintes as vendas cairão de novo ao nível normal. Uma conclusão segura só pode ser tomada se descontarmos este efeito sazonal, isto é, se dessazonalizamos os dados, e observamos apenas a tendência da série.

Do ponto de vista estatístico, os métodos de decomposição tem defeitos teóricos, pois foram desenvolvidos empiricamente, no início do século XX, e não têm base estatística. No modelo aditivo (seção 3.4.2), por exemplo, o valor obtido no passo (i), não é exatamente a tendência T_t, mas sim uma estimativa $\hat{T}_t$ dela. Quando subtraímos este valor de Z_t, no item (ii), o que obtemos não é a série sem tendência desejada

$$Z'_t = Z_t - T_t = S_t + E_t$$

e sim

$$Z'_t = Z_t - \hat{T}_t = S_t + E_t + \varepsilon_t$$

onde o erro ε_t representa o erro presente na estimação de T_t, que é desconhecido. Este erro ε_t irá se propagar na estimação dos componentes S_t e E_t. A série E_t, em particular, não deverá atender às condições exigidas do resíduo de num modelo probabilístico, pois em geral será uma série de observações auto-correlacionadas. Para um estatístico, isto significa que a informação contida nos dados não foi inteiramente aproveitada (a idéia de *filtrar* a série até que o resíduo remanescente seja descorrelacionado está na base dos modelos ARIMA, vistos no Cap. 6).

Os métodos de decomposição, no entanto, continuam a ser largamente empregados, em vista de sua simplicidade e da facilidade de interpretação de seus resultados. Métodos como os vistos acima, ou variantes destes, estão implementados em vários pacotes estatísticos comerciais, ou em planilhas eletrônicas. Existem métodos mais complexos, por exemplo o *Census II* (ver detalhes em [1], p.113) e os baseados em *kernels* (ver por exemplo [2], p.16); a idéia básica porém é sempre a mesma, e as variações existem principalmente nas técnicas para a estimação da tendência.

Referências

[1] Makridakis S, Wheelwright SC, Hyndman RJ. (1998) *Forecasting – Methods and Applications*. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons.

[2] Janacek, Gareth (2001). *Practical time series*. London: Arnold.