3.4.3. Modelo exponencial

3.4.3.1. Função de densidade, valor esperado, variância
3.4.3.2. Uso do modelo exponencial
3.4.3.3. "Falta de memória" do modelo exponencial

3.4.3.1. Função de densidade, valor esperado, variância

O modelo *uniforme* visto na seção anterior é geralmente o primeiro a ser estudado, por ser muito simples matemáticamente, e servir para apresentar os conceitos básicos de *f(x), E(X)* e *V(C)*. Este modelo contudo não é muito útil em aplicações reais; o modelo mais simples de VAC que realmente tem utilidade prática (e também teórica, porque a partir dele são derivados vários outros) é modelo *exponencial*.

Se você esqueceu:
- uma função *exponencial* é aquela na qual a variável está no expoente de alguma constante, como $f(x)=2^x$
- uma função *potência* é aquela na qual a variável está na base, e é elevada a alguma potência constante, como $f(x)=x^2$

A função de densidade deste modelo é dada por:

$$f(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & para \;\; x\geq 0\\ 0 & para \;\; x<0\end{cases}$$

Para indicar que a VAC X segue o modelo exponencial, é comum usarmos a expressão
X ~ *Exp*(*α*)

Pode ser demonstrado que o valor esperado e a variância de X são calculados em função do parâmetro α da forma:

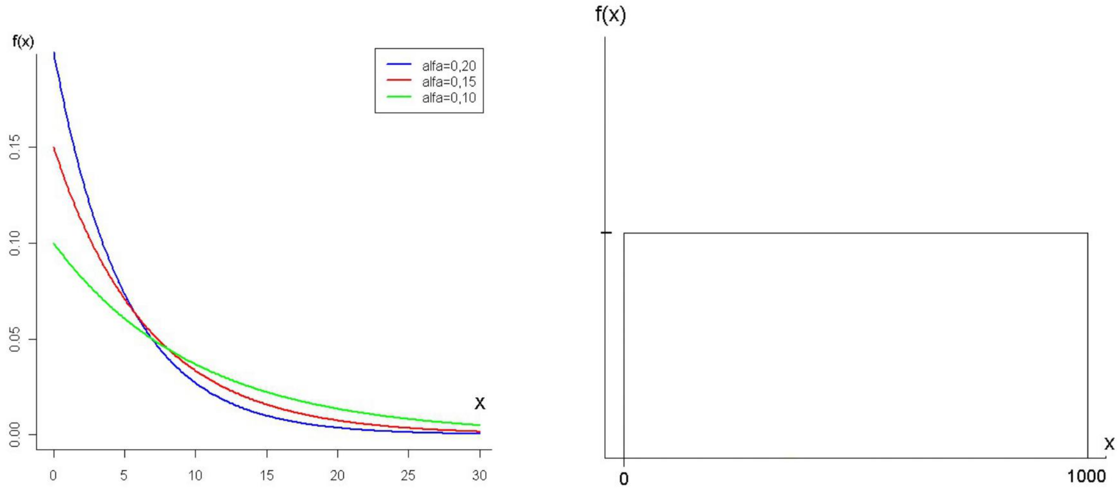
$$E(X)=\frac{1}{\alpha} \qquad\qquad V(X)=\frac{1}{\alpha^2}$$

A Fig. **1A** mostra o gráfico da f.d.p., para três valores de α. O gráfico sempre tem esta forma assimétrica positiva, com *f(x)* máximo em X=0.

3.4.3.2. Uso do modelo exponencial

Este modelo é frequentemente usado para variáveis como o tempo de duração de lâmpadas ou componentes eletrônicos. É fácil ver que ele é mais adequado do que o modelo uniforme para este tipo de variáveis. Se usarmos um modelo U(0,1000) como o da Fig. **1B** para o tempo de duração de uma lâmpada. estaremos afirmando que ela dura em média 500h, e não pode durar mais de 1000h, o que não faz muito sentido; parece mais lógico usar um modelo no qual não haja limite superior no tempo de duração, mas a probabilidade decresça assintoticamente à medida em que o tempo aumenta. Isto acontece no modelo exponencial, o que é um ponto a seu favor.

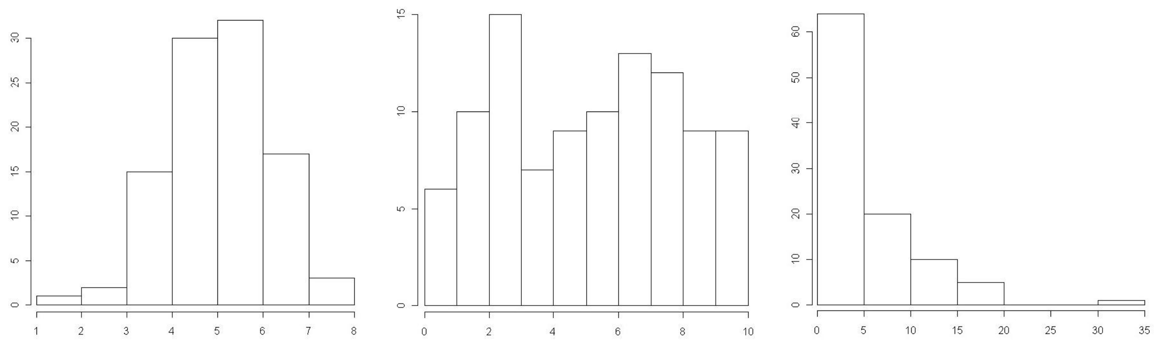
Como saber se um modelo (como este) poder ser usado para descrever as probabilidades associadas a uma variável? Veremos isto com mais detalhes quando mostrarmos o modelo normal (seção **3.4.4**), que é o mais importante da Estatística básica. A resposta mais simples porém é esta: escolhemos um modelo com base em informações colhidas em amostras: uma amostra de lâmpadas é testada, e seus tempos de duração são registrados.



A B

Figura 1. Modelo exponencial e modelo uniforme

O histograma destes tempos dará indicações de qual tipo de modelo deve ser mais adequado. Primeiro, pode ser feita uma simples inspecção visual – a amostra deve representar as características da população, e portanto a forma de seu histograma deve ser uma aproximação da forma da distribuição da variável na população. A Fig. **2** mostra histogramas de amostras simuladas a partir de três modelos diferentes, com n=100; estes gráficos sugerem que o modelo exponencial pode ser um modelo adequado para a população de onde foi extraída a amostra C, mas provavelmente não para as populaçõesde onde vieram as amostras A e B. (Esta conclusão pode depois ser reforçada por meio de testes estatísticos que calculam qual a probabilidade de uma amostra ter saído de uma população que tenha determinado modelo – os *Testes de Aderência*, seção **5.5**).



(A) (B) (C)

Figura 2. Histogramas de três amostras simuladas

3.4.3.3. "Falta de memória" do modelo exponencial

O modelo exponencial é a versão contínua do modelo geométrico (seção **3.3.4**):

geométrico: $p(x) = pq^{x-1}$ exponencial: $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$

Vimos que o modelo geométrico tem uma propriedade interessante, chamada de "falta de memória". Em termos simples, esta propriedade implica que o valor esperado do número tentativas necessárias até que o sucesso seja alcançado é constante, não importando quantas tentativas já foram feitas antes. No problema de lançamentos de um dado até obtermos a face 1, por exemplo, o valor esperado antes de começarmos os lançamentos é de E(X)=6; isto quer dizer que, em média, teremos que fazer 6 lançamentos até conseguirmos o sucesso. Se já fizemos 10 lançamentos e não conseguimos nenhuma vez a face 1, no entanto, o valor esperado do número de tentativas necessárias até o sucesso continua sendo E(X)=6. O número de tentativas já feitas não importa, porque o modelo não tem "memória" do que aconteceu no passado. Isto é fácil de entender, neste caso: não importa quantas vezes o dado já foi lançado, a probabilidade P(X=1) continua sendo 1/6, e portanto o valor esperado continua sendo 6. (Muitos jogadores de cassino, porém, não entendem isto. Se por exemplo estão jogando numa roleta e os últimos números que saíram foram todos pares, acreditam que o próximo número tem maior probabilidade de ser ímpar; porque, afinal, os números pares e ímpares devem aparecer com a mesma frequência, e agora é a vez dos ímpares aparecerem, para equilibrar o total... Este tipo de raciocínio errado é tão comum que recebe até um nome, a "falácia do jogador" (*gambler's fallacy*).

No modelo exponencial esta propriedade também existe, mas é mais difícil de entender, intuitivamente. A propriedade diz, em termos simples, que a probabilidade de a lâmpada durar pelo menos mais *t* horas é constante, não importando quanto tempo *s* a lâmpada já durou. Em termos matemáticos, a probabilidade condicional de uma lâmpada usada durar mais de *t* horas adicionais, dado que já durou *s* hora, será igual à propriedade de uma lâmpada nova durar mais de *t* horas:

$$P(X > t + s \mid X > s) = P(X > t) \qquad \text{para qualquer } s$$

Se por exemplo a probabilidade de uma lãmpada nova durar mais de 1000h for de P=0,8, a probabilidade de uma lâmpada que já durou 2000 h durar mais de 1000 h adicionais continua sendo P=0,8. Isto implica que o valor esperado é sempre o mesmo, não importando quanto tempo a lâmpada já tenha durado.

Isto não parece coerente com o que esperaríamos, e parece contradizer a experiência empírica que temos sobre o tempo de vida de diversos equipamentos. Se sabemos por exemplo que o motor de um carro novo de um certo modelo tem duração média de 200 mil quilômetros, não esperamos que, se comprarmos um carro usado que já rodou 150 mil km, ele ainda vá rodar em média mais 200 mil km. O mesmo ocorre com o tempo de vida de seres vivos. Se a expectativa de vida ao nascer (o que é uma forma de valor esperado) de mulheres num certo país é de 80 anos, esperamos quando um menina nasce que ela vá viver em média 80 anos; se ela já está com 79 anos de idade, porém, obviamente não esperamos que vá viver em média mais 80 anos.

Apesar disto, este modelo é muito usado para descrever variáveis como o tempo de duração de equipamentos eletrônicos e lâmpadas (que, aparentemente, não sofrem desgaste), de pedidos de compra numa fábrica, de sobrevivência de espécies animais, etc.