### 3.3.4. Modelo geométrico

O modelo *geométrico* é utilizado em problemas que consistem numa seqüência de experimentos de Bernoulli, repetidos até que seja obtido o primeiro sucesso; a variável de interesse $X$ é o número de repetições feitas.

Suponha por exemplo que você lança um dado repetidas vezes até obter pela primeira vez a face 6, e conta o número de tentativas feitas. Em cada tentativa (que é um experimento de Bernoulli), as probabilidades são:

$$P(\text{sucesso}) = p = 1/6$$
$$P(\text{fracasso}) = q = 5/6$$

Se você consegue a face 6 logo na primeira tentativa, o valor da variável é X=1. A probabilidade de isto ocorrer é

$$P(X=1) = p = 1/6$$

Se a primeira tentativa fracassa, você tenta de novo. Se conseguir então um sucesso, o valor da variável é X=2. A probabilidade de isto ocorrer será:

$$P(X=2) = P(\text{fracasso na } 1^a. \text{ tentativa}) \times P(\text{sucesso na } 2^a. \text{ tentativa})$$
$$P(X=2) = q \times p$$

A probabilidade de você ter que fazer 3 tentativas (fracassar nas duas primeiras, e ter sucesso na terceira), será:

$$P(X=3) = q \times q \times p = q^2p$$

A probabilidade de o sucesso ser obtido em $k$ tentativas será igual à probabilidade de ocorrerem $k$-$1$ fracassos, seguidos de um sucesso:

$$P(X=k) = q \times q \times ... \times q \times p = q^{k-1}p$$

O modelo para a função de probabilidades é, portanto:

$$P(X=k) = q^{k-1}p \qquad \text{para } k \geq 1$$

Este modelo é chamado de *geométrico* porque as probabilidades seguem uma progressão geométrica com razão $q$. Usando as propriedades destas progressões, pode ser demonstrado que:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$
$$V(X) = \frac{q}{p^2}$$

Para o problema dos lançamentos de um dado, mencionado acima:

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{1/6} = 6$$
$$V(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{5/6}{(1/6)^2} = 30$$

O valor esperado indica que, em média, são feitas seis tentativas até que a face 1 apareça pela primeira vez. Note que esta variância é muito grande, se comparada à variância da distribuição dos resultados de um lançamento de um dado, vista na Seção 3.3.2, que era de V(X)=2,917. Isto era de se esperar, porque no lançamento de um dado os resultados variam apenas entre 1 e 6, e neste problema de distribuição geométrica os valores de X partem de 1 e tendem a infinito.

A Tab. 1 mostra a distribuição de probabilidades para o problema do lançamento de um dado, e a Fig. 1 mostra o gráfico desta distribuição. Note que a distribuição é infinita à direita, pois a variável X não há um tem um limite superior; as probabilidades p(x) tendem para zero e a função de distribuição F(X) tende para 1.

Há três pontos que devem ser mencionados, em relação a este modelo. Primeiro, é preciso tomar cuidado para evitar um erro de interpretação que é comum entre os alunos que estudam o assunto pela primeira vez: o modelo não implica que fica cada vez mais difícil o dado mostrar a face 6; o fato de p(10) ser menor que p(1), por exemplo, não quer dizer que haja menor probabilidade de sucesso na 10ª. tentativa do que na primeira; quer dizer apenas que a probabilidade de serem necessárias 10 tentativas até conseguir um sucesso é pequena (pois em média são necessárias 6 tentativas, que é o valor esperado de X).

**Tabela 1**

| X | p(x) | F(x) |
|---|---|---|
| 1 | 0.1667 | 0.1667 |
| 2 | 0.1389 | 0.3056 |
| 3 | 0.1157 | 0.4213 |
| 4 | 0.0965 | 0.5177 |
| 5 | 0.0804 | 0.5981 |
| 6 | 0.0670 | 0.6651 |
| 7 | 0.0558 | 0.7209 |
| 8 | 0.0465 | 0.7674 |
| 9 | 0.0388 | 0.8062 |
| 10 | 0.0323 | 0.8385 |
| ... | ... | ... |

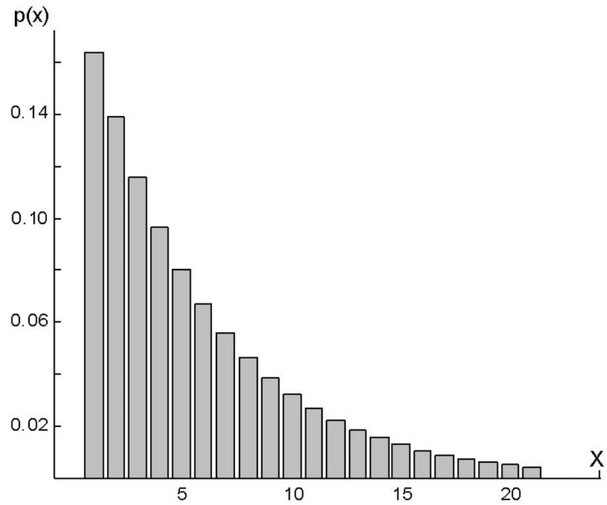


**Figura 1. Distribuição geométrica, p=1/6**

Segundo, alguns livros (e o R) definem a variável X não como o número de *tentativas* feitas, mas sim como o número de *fracassos* ocorridos até que seja obtido o sucesso. Por isso, para calcular *p(10)* como na tabela acima, usando a função `dgeom` do R, é preciso especificar X como

```
x=9  # numero de fracassos antes do sucesso
p=1/6
pr=dgeom(x,p)
```

Terceiro, a distribuição geométrica tem uma curiosa propriedade chamada de "falta de memória", que pode ser ilustrada por meio de um problema:

Existe um jogo de dados chamado *Pigs*, no qual um jogador recebe um dado e o lança quantas vezes quiser. Enquanto o dado mostrar números diferentes de 1, o jogador vai somando estes números ao seu total de pontos; quando o dado mostrar a face 1, o jogador perde todos os pontos que ganhou naquela rodada, e passa o dado para o próximo jogador. De acordo com o modelo geométrico, o valor esperado do número de tentativas até o dado mostrar a face 1 é igual a seis. Suponha que você já jogou o dado cinco vezes, e marcou pontos; você jogaria uma sexta vez, ou pararia de jogar, e passaria o dado para o próximo jogador?

Conhecer o valor esperado não ajuda o jogador a tomar uma decisão, neste problema, porque a distribuição não tem memória. Não importa quantas vezes você já jogou o dado, a probabilidade da face 1 será sempre a mesma, e o valor esperado do número de tentativas necessárias para obter esta face será sempre o mesmo, igual a seis.