3.1.3. Cálculo pela enumeração dos resultados possíveis

Alguns problemas simples podem ser resolvidos pela *enumeração* de todos os resultados: fazemos uma lista, contamos quantos resultados existem, quantos deles nos interessam, e usamos a definição clássica. A lista tem que ser *exaustiva* (i.e., incluir todos os resultados possíveis). Além disso, e os resultados têm que ser *equiprováveis*; se não forem, às vezes é possível mudar a forma de enumerar os resultados, para conseguir a equiprobabilidade.

Exemplo 1. Lançamentos de duas moedas

Retornemos agora ao problema mencionado anteriormente: qual a probabilidade de obtermos duas caras, ao lançarmos uma moeda duas vezes? (ou se lançarmos ao mesmo tempo duas moedas diferentes, o que dá no mesmo). Se o que nos interessa é o número de caras, os resultados possíveis são três: 0, 1 e 2 caras. Estes três resultados, porém, não parecem ser equiprováveis; alguns experimentos são suficientes para mostrar que o resultado "1 cara" é mais provável do que o "0 caras" ou o "2 caras".

Para que tenhamos resultados equiprováveis, precisaremos enumerar os resultados possíveis do experimento levando em conta o resultado de cada moeda. Teremos então quatro resultados possíveis (representando a cara por C, e a coroa por K):

(C,C) (C,K) (K,C) (K,K)

Estes resultados podem ser organizados na forma de uma matriz 2×2, como na Fig. **1**.

		segundo lançamento	
		C	K
primeiro	C	CC	CK
lançamento	K	KC	KK

Figura 1. Resultados possíveis, no lançamento de duas moedas

Ou na forma de uma "diagrama de árvore", como na Fig. **2**.

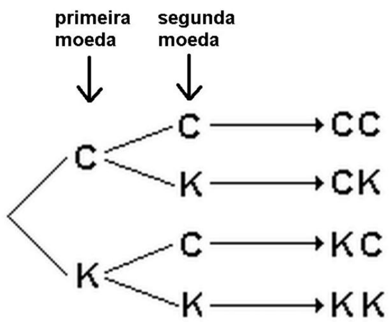

Figura 2. Diagrama de árvore, no lançamento de duas moedas

É razoável pressupor que estes quatro resultados sejam equiprováveis. Não há nada que nos leve a crer, por exemplo, que o resultado CC seja mais ou menos provável do que o resultado CK, já que a diferença entre eles é apenas a substituição da cara C no segundo lançamento pela coroa K, e ambas têm a mesma probabilidade. Como o resultado que nos interessa é apenas aquele que contém duas caras, podemos aplicar a definição clássica e dizer que

$$P(2\ \text{caras}) = P(CC) = \tfrac{1}{4}$$

O resultado "1 cara", contudo, pode acontecer de duas maneiras diferentes: CK e KC. Sua probabilidade é portanto

$$P(1\ \text{cara}) = 2/4 = \tfrac{1}{2}$$

Por fim, a probabilidade de "0 caras" será:

$$P(0\ \text{caras}) = P(KK) = \tfrac{1}{4}$$

Exemplo 2. Lançamentos de três moedas

Ampliando o problema anterior, vejamos agora o que acontece se uma moeda é lançada três vezes. Se o que nos interessa é o número de *caras* mostradas, os resultados possíveis deste experimento são : 0, 1, 2 ou 3. No entanto, como no caso das duas moedas, estes resultados não serão equiprováveis. Para obtermos a equiprobabilidade, precisamos listar os resultados levando em conta o que foi obtido em cada lançamento (C ou K), como fizemos no exemplo anterior. Teremos então *oito* resultados possíveis:

CCC, CCK, CKC, CKK, KCC, KCK, KKC, KKK

Não é possível representar estes resultados na forma de uma *matriz*, como no exemplo anterior (pois esta matriz seria tridimensional), mas é possível representá-los por meio de um diagrama de árvore, como na Fig. **3**.

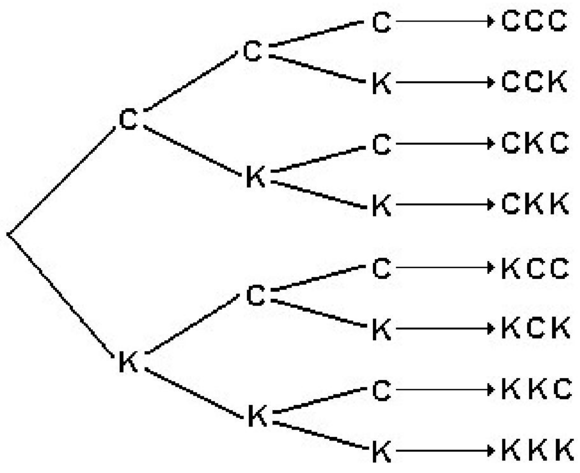

Figura 3. Diagrama de árvore no lançamento de três moedas

Há portanto oito resultados, e é razoável pressupor que sejam todos equiprová-veis. Só há uma maneira de se obterem três caras (CCC), e outra de se obterem zero caras (KKK); podemos portanto escrever que

P(3 caras) = P(0 caras) = 1/8

Há três maneiras de se obter uma cara (CKK, KCK, KKC), e três de se obterem duas caras (CCK, CKC, KCC); podemos portanto escrever que

P(2 caras) = P(1 cara) = 3/8

Podemos organizar estas probabilidades na forma de uma tabela, como a Tabela **1**.

Tabela 1. Número de caras no lançamento de três moedas

Número de caras	Probabilidade
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8
total	1

Esta tabela deixa bem claro que os resultados 0, 1, 2 e 3 não são equiprováveis. O "número de caras" é um exemplo de *variável aleatória discreta* (seção **3.3**).

*Exemplo 3. Lançamentos de dois dado*s

Se dois dados são lançados, qual a probabilidade de ambos mostrarem a face 6? Os resultados possíveis podem ser representados por meio de um diagrama de árvore, como o da Fig. **3**. Este diagrama teria 36 ramos, e apenas um deles nos interessa; a probabilidade pedida, portanto, é igual:

P(66) = 1/36

Consideremos agora um problema similar (já mencionado na Seção **3.1.1.2**): no lançamento de dois dados, é mais provável que a soma dos números mostrados em suas faces superiores seja igual a 7, ou igual a "4 ou 11" ? Se examinarmos as somas, veremos que a menor soma possível é 2 (se obtemos a face 1 em cada dado), e a maior é 12 (face 6 em cada dado). Há portanto 11 resultados possíveis:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

Estes resultados, contudo, são claramente não-equiprováveis. Só há uma maneira de conseguirmos a soma 2 (obtendo 1 em cada dado) ou a soma 12 (obtendo 6 em cada dado), mas há duas maneiras de obtermos a soma 3 (1+2 ou 2+1), três maneiras de obtermos a soma 4 (1+3, 2+2 ou 3+1), etc. O que precisamos fazer é considerar os resultados possíveis levando em conta não a soma dos números mostrados pelos dois dados, mas sim o número mostrado por cada dado. Para isto, podemos listar os resultados possíveis, da forma:

(1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6) (2,1) (2,2) (2,3) ... (6,5) (6,6)

Isto pode ser feito por meio de um diagrama de árvore, ou por meio de uma matriz 6×6 (Fig. 4), onde cada célula contém a soma dos números mostrados pelos dois dados (usei dados de tamanhos diferentes, para enfatizar que são dois dados distintos; portanto, o resultado (1,2) é diferente do resultado (2,1)):

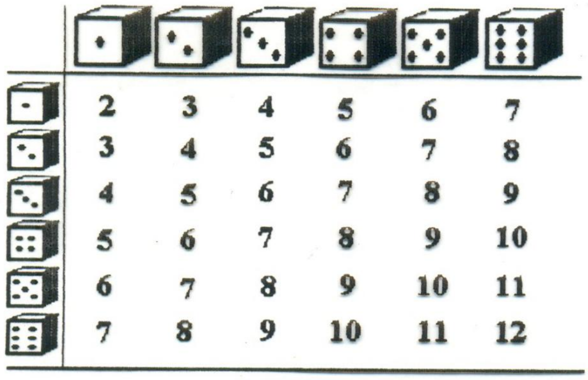

Figura 4. Soma dos números mostrados em dois dados

Estes 36 resultados podem ser considerados equiprováveis: obtermos (1,1) não é mais provável que obtermos (1,2), ou (2,1), ou (2,2), ou qualquer outro dos 36 resultados. Já que há seis maneiras de obtermos a soma 7:

(1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1)

concluímos que

$P(7) = 6/36$.

Há três maneiras de obtermos a soma 4: (1,3) (2,2) (3,1).
Há duas de obtermos a soma 11: (5,6) (6,5).
Portanto,

$P(4 \text{ ou } 11) = (3+2)/36 = 5/36$.

Isto mostra que o resultado "7" é um pouco mais provável que o resultado "4 ou 11".

Este tipo de procedimento para a solução de problemas de probabilidade é chamado geralmente de "solução por enumeração dos resultados possíveis". A idéia é enumerar todos os resultados equiprováveis possíveis, e contar quantos deles são favoráveis ao resultado que nos interessa. (Quando os resultados não são equiprováveis, às vezes é possível representá-los de outra forma, talvez considerando os resultados de cada experimento elementar, como fizemos nos três exemplos anteriores.)

Este procedimento porém não tem muita aplicação prática, por duas razões. A primeira, é que raramente se pode pressupor que os resultados sejam equiprováveis, quando abandonamos os jogos e abordamos problemas de interesse mais prático. A segunda é que estes procedimentos só podem ser aplicados em problemas simples, onde o número de resultados possíveis seja razoavelmente pequeno. A complexidade dos problemas, contudo, aumenta muito rapidamente. Se quisermos fazer um experimento com o lançamento de três dados, por exemplo, ao invés de termos 6×6 = 36 resultados possíveis, como no exemplo anterior, teríamos 6×6×6 = 216 resultados. Se fossem quatro dados, seriam 6^4= 1.296 resultados possíveis, o que seria trabalhoso demais enumerar. Uma outra maneira de resolver estes problemas é dada pela *Análise Combinatória*, que veremos a seguir.